



## Mathematik I für Informatik und Softwaretechnik

Name: \_\_\_\_\_ Gruppe: \_\_\_\_\_ Matrikel: \_\_\_\_\_

### Hinweise:

- Keine Hilfsmittel. Ein Betrugsversuch führt zur Wertung des Testats mit 0 Punkten.
- In den multiple-choice Aufgaben (1-3) wird eine falsche Angabe mit Punktabzug bewertet. Man sollte sich also überlegen, im Zweifelsfall eine Frage nicht zu beantworten. Eine Aufgabe wird insgesamt mit mindestens 0 Punkten bewertet.
- Die Aufgaben 4-10 sind auf zusätzlichen Blättern zu lösen. Nur eine Aufgabe pro Blatt! Auf jedes Blatt Name und Matrikelnummer schreiben! Aufgaben aufsteigend sortiert abgeben.

1.) (4 Punkte) Sind die folgenden Abbildungen  $f$  injektiv, surjektiv oder bijektiv? (Tragen Sie "i" für "injektiv", "s" für "surjektiv", "b" für bijektiv und "n" für keine der drei Eigenschaften ein.)

i)  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto 2n + 1$

ii)  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, z \mapsto z^2$

iii)  $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}, q \mapsto 3q + 7$

iv)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (x - 1)(x - 2)(x - 3)$

2.) (5 Punkte) Gegeben sei die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ . Überprüfen Sie die folgenden Konvergenz- bzw. Divergenzaussagen auf ihre Richtigkeit. (Tragen Sie "w" (oder "j") für "wahr" und "f" (oder "n") für "falsch" ein.)

i)  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  divergiert  $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$  divergiert.

ii)  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$  konvergiert  $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$  konvergiert.

iii)  $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1 \quad \forall n \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$  konvergiert.

iv)  $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{3}{4} \quad \forall n \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$  konvergiert.

v)  $a_n > \frac{1}{n} \quad \forall n \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$  konvergiert.

2.) (3 Punkte) Sind die folgenden Relationen  $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  Äquivalenzrelationen? (Tragen Sie "j" für "ja" und "n" für "nein" ein.)

i)  $R = \{(n, m) : n = m + 1\}$

ii)  $R = \{(n, m) : n \leq m\}$

iii)  $R = \{(n, m) : 1 \leq n \leq 100 \text{ und } 1 \leq m \leq 100\} \cup \{(n, m) : 101 \leq n \text{ und } 101 \leq m\}$

4.) (3 Punkte) Zeigen Sie durch vollständige Induktion

$$\sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}.$$

5.) (3 Punkte) Seien  $A, B$  und  $C$  Mengen mit

$$A \cup B = A \cup C \quad \text{und} \quad A \cap B = A \cap C.$$

Zeigen Sie  $B = C$ .

6.) (3 Punkte) Für welche Werte von  $t \in \mathbb{R}$  haben die Gleichungssysteme  $A\mathbf{x} = 0$  bzw.  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  Lösungen, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

7.) (7 Punkte) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Matrix  $T$  so, dass  $D = T^{-1}AT$  eine Diagonalmatrix ist, und geben Sie  $D$  explizit an.

8.) (3 Punkte) Geben Sie jeweils eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit den genannten Eigenschaften an

- i)  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist konvergent, aber nicht monoton.
- ii)  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist beschränkt und divergent, besitzt aber eine streng monotone Teilfolge.
- iii)  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  besitzt genau  $k \in \mathbb{N}$  Häufungspunkte.

9.) (3 Punkte) Gegeben sei eine  $n \times n$  Matrix  $A$  mit Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  und zugehörigen Eigenvektoren  $v_1, \dots, v_n$ , wobei alle  $\lambda_i \neq 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ) und die Eigenvektoren linear unabhängig sind. Bestimmen Sie die Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren von

- i)  $A^2$
- ii)  $A^{-1}$
- iii)  $2A + 1$

10.) (2 Punkte) Gegeben sei für  $a \in \mathbb{R}$  die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & a \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

- i) Für welche  $a \in \mathbb{R}$  besitzt die Matrix eine inverse?
- ii) Bestimmen Sie  $\det A^{-1}$ .