Universität Stuttgart
Fakultät Mathematik und Physik
Institut für Analysis, Dynamik und Modellierung

Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Analysis und HM 4, 2007
Theoretische Übungen

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass folgende Funktionsfolgen

$$\begin{aligned} g_n(x) &= \frac{1}{2\pi n}\left(\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin x/2}\right)^2, \qquad x \in]-\pi,\pi[, \\ f_\alpha(x) &= \frac{1}{\pi}\frac{\alpha}{\alpha^2+x^2}, \qquad x \in]-\infty,\infty[, \\ \tilde{f}_\beta(x) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\beta}}\, e^{-\frac{x^2}{4\beta}}, \qquad x \in]-\infty,\infty[\end{aligned}$$

für $n \to \infty, \alpha \to 0+$ bzw. $\beta \to 0+$ eine Delta-Folge in Null definieren. (Modifizieren Sie dazu in geeigneter Weise die Definition für Delta-Folgen.)

Aufgabe 2

(i) Sei (X, R, μ) ein Massraum, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $g \in L^q(X)$. Zeigen Sie, dass das Funktional $L_g(f) : L^p \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$L_g(f) = \int_X fg\, d\mu$$

linear und stetig ist und bestimmen Sie dessen Norm.

(ii) Sei $L : \ell^\infty \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$L(x) = \limsup_{n\to\infty} x_n, \quad x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty .$$

Zeigen Sie, dass L stetig ist.

Aufgabe 3

(i) Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ und sei $\hat{f}$ die Fourier-Transformation von f. Zeigen Sie, dass die Funktion $f_a(x) = f(x-a)$, $a \in \mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}$ integrierbar ist und bestimmen Sie deren Fourier-Transformation.

(ii) Sei $f \in C^1(\mathbb{R})$ $2\pi-$periodisch auf $\mathbb{R}$ und seien $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ die Fourier-Koeffizienten von f . Bestimmen Sie die Fourier-Koeffizienten der Funktion $f_a(x) = f(x+a)$, $a \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4

Seien $f, g \in C^1$ $2\pi-$periodisch auf $\mathbb{R}$ und seien $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ die Fourier-Koeffizienten von f und g, d.h.

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x)\, dx, \quad b_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} g(x)\, dx .$$

Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{j-n} b_n = c_j ,$$

konvergiert und dass c_j die Fourier-Koeffizienten der Funktion fg sind.