Übungsblatt zur Vorlesung Analysis 2 SS 2010

Aufgabe 1

Die sogenannten Tschebyscheff Polynome $T_n(x)$ sind auf dem Intervall $[-1,1]$ rekursiv definiert durch:

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

a) Zeigen Sie, dass

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad x \in [-1,1]$$

gilt.
b) Es sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(x)$ für $x \in [-1,1]$ und $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$. Beweisen Sie, dass dann die Funktion f stetig ist.

Aufgabe 2

Die Funktion $f : [0,\infty) \times Y \to \mathbb{K}^d$ sei stetig in x für alle $y \in Y$. Weiter gelte

$$\forall_{x\in[0,\infty)} \ \forall_{y\in Y} \ \|f(x,y)\| \leq g(x)$$

und $\int_0^\infty g(x)\,\mathrm{d}\,x < \infty$. Beweisen Sie, dass das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}\,x$$

gleichmäßig bezüglich $y \in Y$ konvergiert .

Aufgabe 3

Beweisen Sie die folgenden Entwicklungen

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + ...$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + ...,$$

wobei $0 < x < 1$.
Hinweis: Entwicklen Sie die Ableitungen von $\ln(1+x)$ bzw. $\arctan x$ und integrieren Sie diese gliedweise auf dem Intervall $[0,x]$. Warum ist die gliedweise Integration erlaubt?

Aufgabe 4

1. Entwicklen Sie die Funktion $\frac{\sin x}{x}$ in eine Potenzreihe und finden Sie damit die Lösung der folgenden Differentialgleichung

$$f'(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad 0 < x < \infty.$$

2. Betrachten Sie die Reihe

$$S(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + ...$$

Zeigen Sie, dass für $|x| < 1$ gilt

$$(1-x)S'(x) = \frac{1}{2}\,S(x). \tag{1}$$

Beweisen Sie desweiteren, dass jede durch eine Potenzreihe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ darstellbare Lösung von (1) mit $f(0) = 1$ eindeutig durch die Reihe $S(x)$ gegeben ist.