Universität Stuttgart
Fakultät Mathematik und Physik
Institut für Analysis, Dynamik und Modellierung

Übungsblatt zur Vorlesung Analysis 3 WS 2010/11

Aufgabe 1

Es sei $(X, \mathcal{R}, \mu)$ ein Maßraum und $\mu(X) < \infty$. Wir betrachten reelle Funktionen $f_n, f : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie folgende Aussagen:

1. Konvergiert $(f_n)_n$ gleichmäßig gegen f, dann konvergiert sie auch in $L_2(X)$ gegen f.
2. Konvergiert $(f_n)_n$ in $L_2(X)$ gegen f, dann konvergiert sie auch in $L_1(X)$ gegen f.
3. Konvergiert $(f_n)_n$ in $L_1(X)$ gegen f, dann konvergiert sie auch im Maß gegen f.

Geben Sie ein Beispiel dafür, dass aus der Konvergenz im Maß i.A. nicht die Konvergenz in $L_1(x)$ folgt.

Aufgabe 2

1. Seien für $k \in \mathbb{N}$ die Funktionen $f_k \in L_1(\mathbb{R}^n)$ mit $f_k \geq 0$ gegeben. Zeigen Sie:
$$\int \liminf_{k\to\infty} f_k(x)\, dx \leq \liminf_{k\to\infty} \int f_k(x)\, dx. \tag{1}$$
2. Finden Sie ein Beispiel bei dem in (1) eine echte Ungleichung ($<$ statt $\leq$) vorliegt.

Aufgabe 3 (schriftlich, Abgabe am 19.11. in den Übungen)

Es sei $X \subset \mathbb{R}^n$. Beweisen Sie, dass $C_0^\infty(X)$ dicht in $L_1(X)$ ist. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

1. Zeigen Sie, dass die Treppenfunktionen dicht in $L_1(X)$ liegen.
2. Zeigen Sie, dass C_0^∞ dicht in der Menge der Treppenfunktionen liegt. Betrachten Sie dazu die Faltung $h = \phi * \delta_k$, wobei δ_k eine Dirac-Folge ist, d.h.
$$\delta_k := \frac{k^n}{c} g(\|kx\|), \quad c := \int_{\mathbb{R}^n} g(\|x\|)\, dx$$
und
$$g(r) := \begin{cases} \exp(\frac{-1}{1-r^2}) \,, & r \in (-1,1) \\ 0 \,, & \text{sonst} \end{cases}$$
Zeigen Sie, dass $h = \phi * \delta_k \in C_0^\infty \ \forall k \in \mathbb{N}$. Beweisen damit, dass
$$\forall \phi \text{ (Treppenfunktion)}, \ \varepsilon > 0 \ \ \exists h \in C_0^\infty(X) : \|\phi - h\|_{L_1} < \varepsilon.$$

Aufgabe 4

Es sei $(X, \mathcal{R}, \mu)$ ein Maßraum mit $X = [a, b], \mu(X) < \infty$. Sei $f \in L_1(X)$. Zeigen Sie, dass dann eine Menge $E \in \mathcal{R}$ existiert, sodass $f|_E$ stetig ist. Zeigen Sie dazu:

1. $\exists (f_n)_{n\in\mathbb{N}}, \ f_n \in C_0^\infty(X) : f_n \to f \quad$ in $L_1(X)$.
2. $f_n \to f \quad$ im Maß.
3. $\exists$ Teilfolge $(f_{n_k}) : \ f_{n_k} \to f \quad$ punktweise $\mu-$ f.ü.
4. $\forall_{\delta>0} \exists_{E_\delta \in \mathcal{R}} : \quad$ 1) $\mu(X \setminus E_\delta) < \delta, \quad$ 2) $f_{n_k}|_{E_\delta} \to f|_{E_\delta} \quad$ gleichmäßig.

Aufgabe 5

1. Geben Sie ein Beispiel dafür, dass im Satz von Lebesgue zur monotonen Konvergenz, auf die Voraussetzung der Monotonie nicht verzichtet werden kann.

2. Geben Sie ein Beispiel dafür, dass im Satz von Lebesgue zur majorisierten Konvergenz, auf die Voraussetzung der Majorisierbarkeit nicht verzichtet werden kann.