Universität Stuttgart
Fachbereich Mathematik

PD Dr. W.-P. Düll

Blatt 3 Funktionalanalysis II 13.5.2015

Aufgabe 7.

Zeigen Sie: Sei $a \in L^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times n})$ symmetrisch und gleichmäßig elliptisch auf $\mathbb{R}^n$, $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ schwache Lösung von

$$-\nabla \cdot (a\nabla u) \;=\; f \quad \text{in } \mathbb{R}^n\,.$$

Dann gilt

$$\|u\|_{H^1} \leqq C(n,a)(\|f\|_{L^2} + \|u\|_{L^2})\,.$$

Aufgabe 8.

Zeigen Sie: Sei $\Omega := (0,\infty)\times\mathbb{R}$, $a \in C_b^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^{2\times 2})$ symmetrisch und gleichmäßig elliptisch auf $\overline{\Omega}$, $b \in C_b^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^2)$, $c \in C_b^\infty(\overline{\Omega})$, $f \in C_c^\infty(\overline{\Omega})$ und $u \in C_c^\infty(\overline{\Omega})$ Lösung von

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (a\nabla u) + b\cdot\nabla u + cu &= f \quad \text{in } \Omega\,,\\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega\,. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\sum_{|\alpha|=2} \|\partial_x^\alpha u\|_{L^2(\Omega)} \leqq C(a,b,c)(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)})\,.$$

Aufgabe 9.

Zeigen Sie: Sei $m \in \mathbb{N}_0$, $a \in C_b^{m+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times n})$ symmetrisch und gleichmäßig elliptisch auf $\mathbb{R}^n$, $f \in H^m(\mathbb{R}^n)$ und $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ schwache Lösung von

$$-\nabla \cdot (a\nabla u) \;=\; f \quad \text{in } \mathbb{R}^n\,.$$

Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n, R \in \mathbb{R}^+$ und $\mu \in (0,1)$:

$$\|u\|_{H^{m+2}(B_{\mu R}(x))} \leqq C(n,a,R,\mu)(\|f\|_{H^m(B_R(x))} + \|u\|_{L^2(B_R(x))})\,.$$

Hinweis: Benutzen Sie Abschneidefunktionen und wenden Sie Satz 2.2 (Ganzraumfall) der Vorlesung an.