Blatt 4 Funktionalanalysis II 22.5.2015

Aufgabe 10.

Zeigen Sie: Sei $\Omega := \mathbb{R}^{n-1} \times (0, \infty)$, $0 < \alpha < 1$ und $u \in C^{2,\alpha}_{lok}(\overline{\Omega})$ mit $[u]_{C^{2,\alpha}(\Omega)} < \infty$ und

$$\begin{aligned} \Delta u &= f \quad \text{in } \Omega\,, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

mit $[f]_{C^{0,\alpha}(\Omega)} < \infty$. Dann gilt

$$[u]_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \leqq C(n,\alpha)\,[f]_{C^{0,\alpha}(\Omega)}\,.$$

Aufgabe 11.

Sei $a \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit, $b \in \mathbb{R}^n$, $c > 0$ und $f \in H^m(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie mit Hilfe der Fouriertransformation, dass für hinreichend großes m (in Abhängigkeit von n) eine klassische Lösung $u \in H^{m+2}(\mathbb{R}^n)$ von

$$-\nabla \cdot (a\nabla u) + b \cdot \nabla u + cu = f \quad \text{in } \mathbb{R}^n$$

existiert mit

$$\|u\|_{H^{m+2}(\mathbb{R}^n)} \leqq C(n,a,b,c)\|f\|_{H^m(\mathbb{R}^n)}\,.$$

Aufgabe 12.

Sei $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$. Lösen Sie das Anfangswertproblem für die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) &= \Delta u(x,t)\,, \qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)\,, \\ u(x,0) &= u_0(x)\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,, \end{aligned}$$

mit Hilfe der Fouriertransformation und zeigen Sie, dass für jedes $m \in \mathbb{N}_0$ eine Konstante $C(t,m)$ existiert, so dass

$$\|u(.,t)\|_{H^m(\mathbb{R})} \leqq C(t,m)\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

für alle $t > 0$ gilt.