Universität Stuttgart
Fachbereich Mathematik

PD Dr. W.-P. Düll

Blatt 7 Funktionalanalysis II 17.6.2015

Aufgabe 19.

a) Sei $X = C^0([0,1],\mathbb{C})$, $A = \frac{d}{dx}$ und $D(A) = C^1([0,1],\mathbb{C})$. Bestimmen Sie $\sigma(A)$.

b) Sei $X = C_0^0([0,1),\mathbb{C}) = \{f \in C^0([0,1),\mathbb{C}) : \lim_{x\to 1} f(x) = 0\}$, $A = \frac{d}{dx}$ und $D(A) = C_0^1([0,1),\mathbb{C}) = \{f \in C^1([0,1),\mathbb{C}) : f, f' \in C_0^0([0,1),\mathbb{C})\}$. Bestimmen Sie $\sigma(A)$.

c) Zeigen Sie: Sei X ein Banachraum und $A : D(A) \to X$ ein dicht definierter Operator mit $\rho(A) \neq \emptyset$. Dann ist A abgeschlossen.

Aufgabe 20.

a) Sei $X = C_0^0(\mathbb{R}_0^+,\mathbb{C})$, $A = \frac{d}{dx}$ und $D(A) = C_0^1(\mathbb{R}_0^+,\mathbb{C})$. Bestimmen Sie $\sigma(A)$.

b) Sei $X = C_0^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$, $A = \frac{d}{dx}$ und $D(A) = C_0^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Bestimmen Sie $\sigma(A)$.

c) Sei $X = L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$, $A = \frac{d^2}{dx^2}$ und $D(A) = H^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Bestimmen Sie $\sigma(A)$.

Aufgabe 21.

Sei $(A, D(A))$ ein Hille-Yosida-Operator auf einem Banachraum X, d.h., es existieren Konstanten $M \geqq 0$ und $\omega \in \mathbb{R}$ mit $(\omega,\infty) \subseteqq \rho(A)$ und $(\lambda-\omega)^n ||R(\lambda,A)^n|| \leqq M$ für alle $\lambda > \omega$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Außerdem sei $Y := \overline{D(A)}$, $D(A_Y) := \{x \in D(A) : Ax \in Y\}$ und $A_Y x := Ax$ für alle $x \in D(A_Y)$.

a) Zeigen Sie, dass $(A_Y, D(A_Y))$ eine C_0-Halbgruppe auf Y erzeugt.

Hinweis: Aus der Abschätzung für die Resolvente folgt wie im Beweis des Satzes von Hille-Yosida, dass $\lim_{n\to\infty} nR(n,A)y = y$ für alle $y \in Y$ gilt. Folgern Sie daraus, dass $\overline{D(A_Y)} = Y$ ist.

b) Wenden Sie die Aussage aus a) auf $X = C_b^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$, $A = \frac{d}{dx}$ und $D(A) = C_b^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ an.