Funktionalanalysis

Wolf-Patrick Düll

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Das vorliegende Vorlesungsskript ist entstanden im Rahmen der Vorlesung Funktionalanalysis, die ich im Wintersemester 2012/13 sowie im Wintersemester 2014/15 an der Universität Stuttgart gehalten habe.
Das Vorlesungsskript ist kein offizielles Dokument der Universität Stuttgart. Es kann nicht garantiert werden, dass dieses Dokument ohne jeglichen Fehler ist. Bei Fragen oder dem Auffinden von Fehlern können Sie mir gerne eine Nachricht zukommen lassen, zum Beispiel an:

duell@mathematik.uni-stuttgart.de

Ich danke ganz besonders Frau Christina Koch, die das Manuskript mit LaTeX gesetzt hat.

Wolf-Patrick Düll

1. Grundlegende Räume und Abbildungen in der Funktionalanalysis

1.1. Skalarprodukte, Normen und Metriken

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Definition 1.1.1 (Skalarproduktraum)**.** *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon V \times V \to \mathbb{K}$ heißt* Skalarprodukt *(oder* inneres Produkt*) auf V, falls gilt:*

1. *Für alle $\alpha \in \mathbb{K}$ und $x, y, z \in V$ gilt $\langle \alpha x + y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$.*
2. *Für alle $x, y \in V$ gilt $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.*
3. *Für alle $x \in V$ gilt $\langle x, x \rangle \geq 0$ sowie $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.*

Wir nennen V zusammen mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ Skalarproduktraum *oder* Prähilbertraum *und schreiben $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.*

Bemerkung 1. *Aus den Eigenschaften 1. und 2. folgt für jedes $\alpha \in \mathbb{K}$ und $x, y, z \in V$ die Identität*

$$\langle x, \alpha y + z \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle.$$

Ein Skalarprodukt ist also für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ eine positiv definite, symmetrische Bilinearform und für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ eine positiv definite, hermitesche Sesquilinearform.

Beispiel 1. *Folgende Vektorräume bilden mit den zugehörigen Abbildungen Skalarprodukträume:*

a) $V = \mathbb{R}^n$, $\langle x, y \rangle := \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$ *(n-dim. euklidischer Raum mit eukl. Skalarprodukt).*

b) $V = \mathbb{C}^n$, $\langle x, y \rangle := \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$.

c) Folgenräume:

$V = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \langle x, x \rangle < \infty\}$, $\langle x, y \rangle := \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i y_i$;

$V = \{x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \langle x, x \rangle < \infty\}$, $\langle x, y \rangle := \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}$.

d) Funktionenräume:

$V = C^0([a, b], \mathbb{R})$ *mit $a < b$ reell mit* $\langle x, y \rangle := \int_a^b x(t) y(t) \,\mathrm{d}t$;

$V = C^0([a, b], \mathbb{C})$ *mit $a < b$ reell mit* $\langle x, y \rangle := \int_a^b x(t) \overline{y(t)} \,\mathrm{d}t$.

Satz 1.1.1 (Ungleichung von Cauchy-Schwarz)**.** *Sei X ein Skalarproduktraum und $x, y \in X$, dann gilt:*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}.$$

Außerdem gilt für $x, y \in X \setminus \{0\}$ genau dann Gleichheit, wenn x und y linear abhängig sind.

Beweis. Für $y = 0$ gilt

$$|\langle x, y\rangle| = |\langle x, 0\rangle| = \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle 0, 0\rangle} = 0.$$

Sei daher $y \neq 0$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ beliebig, dann gilt:

$$0 \leq \langle x + \alpha y, x + \alpha y\rangle = \langle x, x\rangle + \alpha\langle y, x\rangle + \overline{\alpha}\langle x, y\rangle + |\alpha|^2\langle y, y\rangle.$$

Mit $\alpha = -\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle^{-1}$ ergibt sich nach Multiplikation beider Seiten der Ungleichung mit $\langle y, y\rangle > 0$ die Ungleichung

$$0 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle - |\langle x, y\rangle|^2,$$

woraus die zu zeigende Ungleichung folgt. Außerdem gilt Gleichheit in den obigen Ungleichungen genau dann, wenn $x + \alpha y = 0$ ist, also wenn x und y linear abhängig sind.

$\square$

Ein Skalarprodukt kann zur Abstandsmessung verwendet werden.

Definition 1.1.2 (Norm)**.** *Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, eine Abbildung $\|\cdot\|\colon X \to \mathbb{R}$ heißt* Norm, *falls gilt:*

(1) Für alle $x \in X$ gilt $\|x\| \geq 0$ sowie $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(2) Für alle $x \in X$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$.

(3) Für alle $x, y \in X$ gilt die Dreiecksungleichung $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Satz 1.1.2. *In jedem Skalarproduktraum X, lässt sich durch $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ eine Norm einführen. Man nennt sie die durch das Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$* induzierte Norm*.*

Beweis. Es sind die Eigenschaften (1) - (3) einer Norm nachzuweisen.

(1) Folgt direkt aus der Eigenschaft (3) des Skalarprodukts.

(2) Folgt aus

$$\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x\rangle} = \sqrt{\alpha\overline{\alpha}\langle x, x\rangle} = |\alpha|\sqrt{\langle x, x\rangle} = |\alpha|\|x\|.$$

(3) Für $z = a + ib \in \mathbb{C}$ gilt $z + \overline{z} = a + ib + a - ib = 2a = 2\mathrm{Re}(z)$ und so erhalten wir zunächst

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y\rangle \\ &= \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \overline{\langle x, y\rangle} + \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}(\langle x, y\rangle) + \|y\|^2.\end{aligned}$$

Außerdem gilt mit der Ungleichung von Cauchy-Schwarz:

$$\mathrm{Re}(\langle x, y\rangle) \leq |\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle} = \|x\|\|y\|.$$

Aus diesen beiden Rechnungen ergibt sich schließlich

$$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2,$$

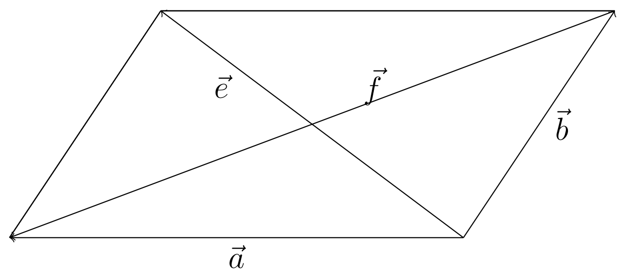
womit die Eigenschaft (3) durch beidseitiges Ziehen der Wurzel folgt.

□

Satz 1.1.3 (Parallelogrammgleichung)**.** *Sei* $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *ein Skalarproduktraum und* $\|\cdot\|$ *die durch* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *induzierte Norm. Dann gilt für alle* $x, y \in X$ *die Identität*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Diese Identität lässt sich geometrisch veranschaulichen. Dazu betrachten wir zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$, die ein Parallelogramm aufspannen. Ferner betrachten wir die Diagonalen $\vec{e} = \vec{a} - \vec{b}$ und $\vec{f} = \vec{a} + \vec{b}$, es ergibt sich folgende Skizze:



Mit $\xi := \|\vec{\xi}\|$ für $\xi \in \{a, b, e, f\}$ gilt in einem Parallelogramm die Beziehung

$$e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2).$$

Daher ist diese Identität auch als *Parallelogrammgleichung* bekannt.

Beweis. Der Beweis gelingt durch einfaches Nachrechnen:

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle \\ &= 2\|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle + 2\|y\|^2 \\ &= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).\end{aligned}$$

□

Mit Hilfe von Skalarprodukten kann man einen Winkelbegriff einführen. Nach der Ungleichung von Cauchy-Schwarz gilt immer:

$$\frac{|\langle x, y\rangle|}{\|x\|\|y\|} \leq 1$$

für $x, y \neq 0$. Dies sichert die Korrektheit der nächsten Definition.

Definition 1.1.3 (Winkel). *Sei X ein reeller Skalarproduktraum und seien $x, y \in X \setminus \{0\}$. Dann nennt man $\alpha \in [0, \pi]$ mit*

$$\cos \alpha = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}$$

den Winkel *zwischen x und y.*

Definition 1.1.4 (Orthogonalität). *Sei X ein Skalarproduktraum.*

a) $x, y \in X$ heißen orthogonal *zueinander, wenn $\langle x, y \rangle = 0$ gilt. Wir verwenden dann die Schreibweise $x \perp y$.*

b) Zwei nichtleere Teilmengen $X_1, X_2 \subseteq X$ heißen orthogonal zueinander, wenn für alle $x \in X_1$, $y \in X_2$ die Gleichung $\langle x, y \rangle = 0$ erfüllt ist. Wir schreiben dann auch $X_1 \perp X_2$.

Satz 1.1.4 (Pythagoras). *Sei X ein Skalarproduktraum und $x, y \in X$ orthogonal zueinander. Dann gilt:*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Beweis. Wegen Orthogonalität gilt $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle = 0$ und wir erhalten

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \underbrace{\langle x, y \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle y, x \rangle}_{=0} = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

□

Definition 1.1.5 (normierter Raum). *Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum X zusammen mit einer Norm $\|\cdot\|$ heißt* normierter Raum. *Wir schreiben dann das Tupel $(X, \|\cdot\|)$.*

Bemerkung 2. *Nach Satz 1.1.2 ist jeder Skalarproduktraum auch ein normierter Raum. Ein normierter Raum ist aber nicht immer ein Skalarproduktraum. Dazu betrachten wir $X = \mathbb{R}^2$ mit $\|x\| := \max_{k=1,2} |x_k|$ für $x = (x_1, x_2) \in X$. Sei $x = (1, 2)$ und $y = (2, 0)$. Dann ist $\|x\| = \|y\| = 2$, $\|x + y\| = 3$ und $\|x - y\| = 2$. Damit ist aber*

$$13 = 9 + 4 = \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 2(4 + 4) = 16$$

und so die Parallelogrammgleichung nicht erfüllt. Daher kann $\|\cdot\|$ nicht von einem Skalarprodukt induziert sein.

Satz 1.1.5. *Genau diejenigen normierten Räume X, in denen die Parallelogrammgleichung gilt, sind Skalarprodukträume. Im reellen Fall lässt sich dann durch*

$$\langle x, y \rangle := \frac{1}{4} \left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 \right)$$

und im komplexen Fall durch

$$\langle x, y \rangle := \frac{1}{4} \left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + \mathrm{i} \left(\|x + \mathrm{i}y\|^2 - \|x - \mathrm{i}y\|^2 \right) \right)$$

ein Skalarprodukt auf X erklären, welches die Norm $\|\cdot\|$ induziert.

Beweisidee. Setze das Skalarprodukt mittels der beiden Formeln im Satz an (diese nennt man auch *Polarisationsformeln*) und verifiziere die Eigenschaften eines Skalarprodukts. Für nähere Details siehe beispielsweise [4]. □

Beispiele normierter Räume:

Beispiel 2. *Wir betrachten* $\mathbb{R}^n$ *oder* $\mathbb{C}^n$ *mit*

$$\|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{für } 1 \leq p < \infty$$

oder

$$\|x\|_\infty := \max_{k=1,\dots,n} |x_k|.$$

Hierbei erfolgt der Nachweis der Dreiecksungleichung mit Hilfe der sogenannten Minkowski-Ungleichung*:*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

für $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ *und* $1 \leq p < \infty$. *Wir werden diese Ungleichung erst im Rahmen der* L^p*-Räume in allgemeinerer Form beweisen.*

Beispiel 3 (Folgenräume)**.** *Wir bezeichnen mit* $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ *Abbildungen* $x \colon \mathbb{N} \to \mathbb{K}$, $x \mapsto x_n$.

a) $\ell^p := \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty\}$, $1 \leq p < \infty$ *mit* $\|x\|_{\ell^p} := (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}}$.

b) $\ell^\infty := \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \|x\|_{\ell^\infty} < \infty\}$ *mit* $\|x\|_{\ell^\infty} := sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|$.

c) $c_0 := \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \lim_{k\to\infty} x_k = 0\}$ *Nullfolgen mit* $\|\cdot\|_{\ell^\infty}$.

d) $c := \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid x \text{ ist eine konvergente Folge}\}$ *mit* $\|\cdot\|_{\ell^\infty}$.

e) $c_* = \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid x_k \neq 0 \text{ für höchstens endlich viele } k \in \mathbb{N}\}$ *mit* $\|\cdot\|_{\ell^p}$, $1 \leq p \leq \infty$.

Beispiel 4 (Funktionenräume)**.** *Sei* $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^n$ *beliebig,* $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^n$ *kompakt und* $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen (oder allgemeiner lokal kompakt). Dann definieren wir die folgenden Funktionenräume:*

a) $B(M, \mathbb{K}) := \{f \colon M \to \mathbb{K} \mid \|f\|_\infty < \infty\}$ *mit* $\|f\|_\infty := \sup_{x\in M} |f(x)|$ *heißt der Raum der* beschränkten Funktionen *mit Werten in* $\mathbb{K}$. *Für* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *schreiben wir auch* $B(M)$ *statt* $B(M, \mathbb{R})$, *ebenso in den folgenden Beispielen.*

b) $C^0(K, \mathbb{K}) := \{f \colon K \to \mathbb{K} \mid f \text{ stetig }\}$ *mit* $\|f\|_{C^0} := \sup_{x\in K} |f(x)| = \max_{x\in K} |f(x)|$ *heißt der Raum der* stetigen Funktionen *auf der kompakten Menge* K *(mit Werten in* $\mathbb{K}$*).*

c) $C_b^0(\Omega, \mathbb{K}) := \{f \colon \Omega \to \mathbb{K} \mid f \text{ stetig und } \|f\|_{C^0} < \infty\}$ *mit* $\|f\|_{C^0} := \sup_{x\in\Omega} |f(x)|$ *heißt der Raum der* beschränkten, stetigen Funktionen *auf* Ω.

d) $C_c^0(\Omega, \mathbb{K}) := \{f \in C_b^0(\Omega, \mathbb{K}) \mid supp\, f \text{ ist kompakte Teilmenge von } \Omega\}$ *mit* $\|\cdot\|_{C^0}$ *heißt der Raum der* beschränkten, stetigen Funktionen mit kompaktem Träger. *Dieser ist dabei definiert durch* $supp\, f := \overline{\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}} = clos\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}$.

e) $C^0_{unif}(\Omega,\mathbb{K}) := BUC(\Omega,\mathbb{K}) := \{f \in C^0_b(\Omega,\mathbb{K}) \,|\, f$ *ist gleichmäßig stetig auf* $\Omega\}$ *mit* $\|\cdot\|_{C^0}$ *heißt der Raum der* beschränkten, gleichmäßig stetigen Funktionen.

f) $C^{0,\alpha}(\Omega,\mathbb{K}) := \{f \in C^0_b(\Omega) \,|\, \|f\|_{C^{0,\alpha}} < \infty\}$ *für* $\alpha \in (0,1]$ *mit der Norm*

$$\|f\|_{C^{0,\alpha}} := \|f\|_{C^0} + [f]_{C^{0,\alpha}}$$

und der Halbnorm

$$[f]_{C^{0,\alpha}} := \sup_{\substack{x,y\in\Omega\\ x\neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}$$

heißt der Raum der Hölder-stetigen Funktionen. *Für* $\alpha = 1$ *erhalten wir* $C^{0,1}(\Omega,\mathbb{K}) = Lip(\Omega,\mathbb{K})$, *wobei* $Lip(\Omega,\mathbb{K})$ *der Raum der* Lipschitz-stetigen Funktionen *ist.*

g) $C^m(K,\mathbb{K}) := \{f\colon K \to \mathbb{K} \,|\, \partial^j_x f$ *ist stetig auf* $K^\circ = \operatorname{int} K$ *und stetig fortsetzbar auf* K *für* $0 \le |j| \le m\}$ *mit der Norm*

$$\|f\|_{C^m} := \sum_{0\le|j|\le m} \|\partial^j_x f\|_{C^0}$$

heißt Raum der m-fach stetig differenzierbaren Funktionen. *Hierbei ist* $x = (x_1,\dots,x_n)$, $j = (j_1,\dots,j_n) \in \mathbb{N}^n$ *ein Multiindex,* $|j| := \sum_{i=1}^n j_i$ *und* $\partial^j_x := \partial^{j_1}_{x_1}\dots\partial^{j_n}_{x_n}$ *mit* $\partial^0_x f = f$.

h) *Analog definiert man* $C^m_b(\Omega,\mathbb{K})$ *(beschränkt),* $C^m_c(\Omega,\mathbb{K})$ *(kompakter Träger) und* $C^m_{unif}(\Omega,\mathbb{K}) := \{f\colon \Omega \to \mathbb{K} \,|\, \partial^j_x f \in C^0_{unif}(\Omega,\mathbb{K})\}$ *für* $|j| = 0,\dots,m$ *mit der Norm* $\|\cdot\|_{C^m}$.
Außerdem definieren wir $C^{m,\alpha}(\Omega,\mathbb{K}) := \{f\colon \Omega \to \mathbb{K} \,|\, \partial^j_x f \in C^0(\Omega,\mathbb{K})$ *für* $|j| = 0,\dots,m$ *und* $\partial^m_x f \in C^{0,\alpha}(\Omega,\mathbb{K})\}$ *für* $m \ge 1$ *mit*

$$\|f\|_{C^{m,\alpha}} = \|f\|_{C^{m-1}} + \sum_{|j|=m} \|\partial^j_x f\|_{C^{0,\alpha}}.$$

Definition 1.1.6 (Halbnorm)**.** *Sei* X *ein* $\mathbb{K}$*-Vektorraum. Eine Abbildung* $[\cdot]\colon X \to \mathbb{R}$ *heißt* Halbnorm*, wenn sie alle Eigenschaften einer Norm erfüllt, außer*

$$[x] = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Wir bezeichnen mit $(X,[\cdot])$ *dann einen* halbnormierten Raum.

Satz 1.1.6. *Sei* $(X,[\cdot])$ *ein halbnormierter Raum. Dann gilt:*

a) $\operatorname{Kern}([\cdot]) := \{x \in X \,|\, [x] = 0\}$ *ist ein Untervektorraum von* X.

b) $X/\operatorname{Kern}([\cdot])$ *mit der kanonischen Quotientenvektorraumstruktur und einer Abbildung* $\|x + \operatorname{Kern}([\cdot])\| := [x]$ *ist ein normierter Raum.*

Anmerkung:
Wir schreiben $X/\operatorname{Kern}([\cdot]) = \{\hat{x} \,|\, x \in X\}$ mit $\hat{x} = x + \operatorname{Kern}([\cdot]) = \{y \in X \,|\, x \sim y\}$ mit der Äquivalenzrelation $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \operatorname{Kern}([\cdot])$. Dann liefern $\hat{x} + \hat{y} = \widehat{x+y}$ und $\alpha\hat{x} = \widehat{\alpha x}$ die Vektorraumstruktur auf $X/\operatorname{Kern}([\cdot])$ mit Nullelement $0 + \operatorname{Kern}([\cdot])$.

Beweis.

a) Zunächst gilt $[0] = [0 \cdot x] = 0 \cdot [x] = 0$ und so $0 \in \operatorname{Kern}([\cdot])$ und $\operatorname{Kern}([\cdot]) \neq \emptyset$. Sei nun $x, y \in \operatorname{Kern}([\cdot])$, sowie $\alpha \in \mathbb{K}$ beliebig gewählt. Dann gilt:

$$0 \leq [\alpha x + y] \leq |\alpha| \cdot [x] + [y] = |\alpha| \cdot 0 + 0 = 0,$$

woraus $[\alpha x + y] = 0$ und so $\alpha x + y \in \operatorname{Kern}([\cdot])$ folgt.

b) Wir zeigen zunächst die Wohldefiniertheit von $\|\cdot\|$. Sei dazu $x \sim y$, dann gilt $[x] = [x - y + y] \leq [x - y] + [y] = 0 + [y]$. Analog kann man $[y] \leq [x]$ unter Ausnutzung der Symmetrieeigenschaft von Äquivalenzrelationen zeigen und erhält insgesamt $[x] = [y]$ wie gewünscht. Es sind noch die Normeigenschaften nachzuweisen. Dazu setzen wir $0 = \|x + \operatorname{Kern}([\cdot])\| = [x]$, es folgt $x \in \operatorname{Kern}([\cdot])$ und so $x + \operatorname{Kern}([\cdot]) = \operatorname{Kern}([\cdot]) = 0$. Die übrigen Normeigenschaften folgen unmittelbar aus den Eigenschaften der Halbnorm.

□

Beispiel 5 (Lebesgue-Räume)**.** *Sei $(\Omega, \Sigma, \lambda)$ ein Maßraum. Hierbei ist $\Omega \subseteq \mathbb{K}^n$, Σ eine σ-Algebra und λ ein Maß. Wir definieren*

$$\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\Omega) := \{f \colon \Omega \to \mathbb{K} \mid f \textit{ ist } (\Sigma, \lambda)\textit{-messbar}, [f]_{\mathcal{L}^p} < \infty\}$$

für $1 \leq p \leq \infty$. Ferner können wir zwei Halbnormen definieren:

$$[f]_p = [f]_{\mathcal{L}^p} := \left(\int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \qquad \textit{und} \qquad [f]_\infty = [f]_{\mathcal{L}^\infty} := \inf_{\substack{B \in \Sigma \\ \lambda(B) = 0}} \left(\sup_{x \in \Omega \setminus B} |f(x)| \right).$$

Dann ist $(\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\Omega), [\cdot]_{\mathcal{L}^p})$ für $1 \leq p \leq \infty$ ein halbnormierter Raum. Ferner sei $L^p_{\mathbb{K}}(\Omega) := \mathcal{L}^p_{\mathbb{K}} / \operatorname{Kern}([\cdot]_p) = \mathcal{L}^p_{\mathbb{K}} / \{f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\Omega) \mid f = 0 \ \lambda_{f.ü.}\}$ und $\|f + \operatorname{Kern}([\cdot]_p)\|_{L^p} := [f]_{\mathcal{L}^p}$. Dann ist $(L^p_{\mathbb{K}}(\Omega), \|\cdot\|_{L^p})$ für $1 \leq p \leq \infty$ ein normierter Raum und wir auch als Lebesgue-Raum *bezeichnet.*
Für den Fall $\Omega = \mathbb{N}$, $\Sigma = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ (die Potenzmenge von $\mathbb{N}$) und λ das Zählmaß (d.h. $\lambda(B) = |B|$ für $B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$) erhalten wir $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}) = L^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}) = \ell^p_{\mathbb{K}}$.
Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, schreiben wir von nun an $\mathcal{L}^p(\Omega)$ bzw. $L^p(\Omega)$.
Der einzig schwierige Schritt beim Beweis der (Halb)-Normeigenschaften ist der Nachweis der Dreiecksungleichung. Er basiert auf den im Folgenden behandelten Ungleichungen.

Definition 1.1.7 (Konjugierte Zahl)**.** *Sei $p \in [1, \infty]$. Dann heißt $p' \in [1, \infty]$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, wobei wir $\frac{1}{\infty} := 0$ setzen, die zu p* konjugierte Zahl.

Lemma 1.1.7 (Youngsche Ungleichung)**.** *Sei $a, b \in \mathbb{R}^+_0$ und $p \in (1, \infty)$. Dann gilt:*

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} b^{p'}.$$

Beweis. Für $a = 0$ oder $b = 0$ ist die Behauptung klar. Seien $a, b > 0$. Dann gilt:

$$\ln(ab) = \frac{1}{p} \ln(a^p) + \frac{1}{p'} \ln\left(b^{p'}\right) \leq \ln\left(\frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} b^{p'}\right),$$

da der natürliche Logarithmus konkav ist. Anwenden der Exponentialfunktion liefert die geforderte Behauptung. Für den Beweis der Konkavität sei auf die Analysis 1 verwiesen.
□

Satz 1.1.8 (Höldersche Ungleichung)**.** *Sei* $p \in [1,\infty]$, $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^{p'}(\Omega)$. *Dann ist* $fg \in L^1(\Omega)$ *und es gilt:*

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^{p'}}.$$

Beweis. Für die Fälle $p = 1$ und $p = \infty$ ist der Beweis klar. Sei $1 < p < \infty$ und $\|f\|_{L^p} = 0$. Dann gilt $f = 0$ $\lambda_{\text{f.ü.}}$ und so $fg = 0$ $\lambda_{\text{f.ü.}}$ und damit $\|fg\|_{L^1} = 0$. Analog folgt aus $\|g\|_{L^{p'}} = 0$ ebenfalls $\|fg\|_{L^1} = 0$.
Sei nun $1 < p < \infty$ und $\|f\|_{L^p}, \|g\|_{L^{p'}} > 0$. Wir definieren $\tilde{f} := \frac{f}{\|f\|_{L^p}}$ und $\tilde{g} := \frac{g}{\|g\|_{L^{p'}}}$. Dann gilt:

$$\frac{1}{\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^{p'}}}|fg| = |\tilde{f}\tilde{g}| \leq \frac{1}{p}|\tilde{f}|^p + \frac{1}{p'}|\tilde{g}|^{p'}$$

mit Hilfe der Youngschen Ungleichung. Nach Konstruktion von $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$, nehmen die Integrale von $|f|^p$ und $|g|^{p'}$ über Ω den Wert 1 an. Wir erhalten so mit der Monotonie des Lebesgue-Integrals

$$\frac{1}{\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^{p'}}}\|fg\|_{L^1} \leq \frac{1}{p}\int_\Omega |\tilde{f}|^p \,\mathrm{d}\lambda + \frac{1}{p'}\int_\Omega |\tilde{g}|^{p'} \,\mathrm{d}\lambda = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

und damit die gewünschte Ungleichung.

□

Satz 1.1.9 (Minkowskische Ungleichung)**.** *Sei* $p \in [1,\infty]$ *und* $f, g \in L^p(\Omega)$. *Dann ist* $f + g \in L^p(\Omega)$ *und es gilt:*

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$$

Beweis. Für die Fälle $p = 1$ und $p = \infty$ folgt die Behauptung direkt aus $|f+g| \leq |f|+|g|$. Sei daher $1 < p < \infty$. Dann gilt:

$$|f + g|^p \leq (|f| + |g|)^p \leq 2^p \max\{|f|^p, |g|^p\} \leq 2^p(|f|^p + |g|^p)$$

und somit $f + g \in L^p(\Omega)$. Außerdem gilt:

$$|f + g|^p \leq |f||f + g|^{p-1} + |g||f + g|^{p-1}$$

mit $(p - 1)p' = p$. Daher ist $|f + g|^{p-1} \in L^{p'}(\Omega)$ und es folgt

$$\|f + g\|_{L^p}^p = \int_\Omega |f + g|^p \,\mathrm{d}\lambda \leq (\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p})\||f + g|^{p-1}\|_{L^{p'}}.$$

Wegen $\||f + g|^{p-1}\|_{L^{p'}} = \|f + g\|_{L^p}^{\frac{p}{p'}}$ erhalten wir

$$\|f + g\|_{L^p}^{p-\frac{p}{p'}} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$$

und so wegen $p\left(1 - \frac{1}{p'}\right) = 1$ die Behauptung.

□

Definition 1.1.8 (Metrischer Raum)**.** (X, d) *heißt* metrischer Raum*, falls* $X \neq \emptyset$ *und* $d \colon X \times X \to \mathbb{R}$ *eine Abbildung bei der die folgenden Eigenschaften für alle* $x, y, z \in X$ *erfüllt sind:*

1. *Positivität:*
   $d(x, y) \geq 0$*, sowie* $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

2. *Symmetrie:*
   $d(y, x) = d(x, y)$.

3. *Dreiecksungleichung:*
   $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Die Abbildung d *heißt dann eine* Metrik*. Erfüllt* d *die obigen Eigenschaften, außer* $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$*, dann heißt* d Halbmetrik *und* (X, d) halbmetrischer Raum.

Satz 1.1.10.

a) *Sei* $(X, \|\cdot\|)$ *ein normierter Raum. Dann ist durch* $d(x, y) := \|x - y\|$ *eine Metrik definiert, die folgende zusätzliche Eigenschaften erfüllt:*

   4. *Translationsinvarianz:*
      Für alle $x, y, z \in X$ *gilt* $d(x + z, y + z) = d(x, y)$.

   5. *Homogenität:*
      Für alle $x, y \in X$ *und* $\alpha \in \mathbb{K}$ *gilt* $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x, y)$.

b) *Sei* (X, d) *ein metrischer Raum. Außerdem sei* X *ein* $\mathbb{K}$*-Vektorraum und* d *translationsinvariant und homogen. Dann ist durch*

$$\|x\| := d(x, 0)$$

eine Norm definiert.

Beweis. Siehe Grundvorlesungen zur Analysis oder zur Linearen Algebra. □

Beispiel 6. *Sei* $X \neq \emptyset$ *und*

$$d(x, y) := \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y. \end{cases}$$

Dann ist d *eine Metrik, die sogenannte diskrete Metrik, welche allerdings, sollte* X *ein* $\mathbb{K}$*-Vektorraum sein, keine Norm induziert.*

Bemerkung 3. *Wir haben folgende Hierarchie von Strukturen:*

$$\textit{Skalarproduktraum} \Rightarrow \textit{normierter Raum} \Rightarrow \textit{metrischer Raum},$$

wobei die Umkehrungen im Allgemeinen falsch sind.

1.2. Topologie in Skalarprodukträumen, normierten Räumen und metrischen Räumen

Definition 1.2.1. *Sei (X, d) ein metrischer Raum sowie $A, B, C, M, \mathcal{O}, V, W, Z \subseteq X$, $x_0 \in X$ und $\varepsilon > 0$.*

a) *$B_\varepsilon(x_0) := \{x \in X \,|\, d(x, x_0) < \varepsilon\}$ heißt* offener ε-Ball *um x_0. Ist X ein normierter Raum, dann kann in dieser Definition $d(x, x_0)$ durch $\|x - x_0\|$ ersetzt werden.*

b) *$\mathcal{O}$ heißt* offen, *falls für alle $x \in \mathcal{O}$ ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq \mathcal{O}$ existiert.*

c) *A heißt* abgeschlossen, *falls $X \setminus A$ offen ist.*

d) *$M^\circ := \{x \in M \,|\, \exists_{\varepsilon > 0} : B_\varepsilon(x) \subseteq M\}$ heißt das* Innere *von M.*

e) *$\overline{M} := X \setminus (X \setminus M)^\circ$ heißt* Abschluss *von M*

f) *$\partial M := \overline{M} \setminus M^\circ$ heißt* Rand *von M.*

g) *B heißt* dicht *in A, falls $\overline{B} = A$ gilt.*

h) *C heißt* beschränkt, *falls $x \in X$ sowie $R > 0$ existieren, mit $C \subseteq B_R(x)$.*

i) *Z heißt* zusammenhängend, *falls sich Z nicht als disjunkte Vereinigung zweier nichtleerer Mengen der Form $V \cap Z$ und $W \cap Z$, wobei V und W offen sind, darstellen lässt.*

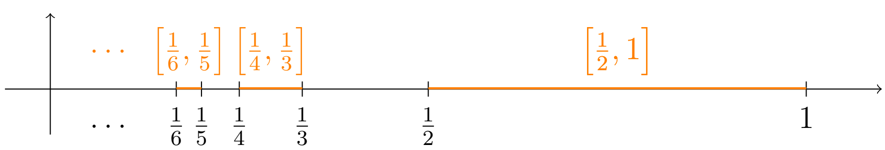
Beispiel 7.

a) *Sei $(X, d) = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$. Dann ist $B_1(0) = B_1(0)^\circ$ offen und zusammenhängend. Ferner ist $\overline{B_1(0)} = \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, \|x\|_2 \leq 1\}$ abgeschlossen und zusammenhängend. Außerdem gilt: $\partial B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, \|\cdot\|_2 = 1\}$.*

b) *Sei $(X, d) = (\mathbb{R}, \|\cdot\|_2 = 1\}$. Dann ist $M = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}\right]$ nicht zusammenhängend, nicht offen und nicht abgeschlossen. Außerdem ist*

$$\partial M = \left\{\frac{1}{m} \,|\, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\} \cup \{0\}.$$

Wir können M auf der reellen Achse visualisieren:



Definition 1.2.2 (Konvergente Folge)**.** *Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (X, d) heißt* konvergent *gegen $x \in X$ für $n \to \infty$, falls*

$$\lim_{n \to \infty} d(x_n, x) = 0 \quad \text{gilt, d.h.} \quad \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{n_\varepsilon \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_\varepsilon} : d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Wir schreiben dann auch $x_n \to x$ für $n \to \infty$, $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ oder $x_n \xrightarrow{n \to \infty} x$.

Bemerkung 4. *Der Grenzwert einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eindeutig bestimmt. Angenommen neben x sei y ein weiterer Grenzwert. Dann erhalten wir mit der Dreiecksungleichung*

$$0 \leq d(x,y) \leq d(x,x_n) + d(x_n,y).$$

Nun gilt aber nach Definition $d(x,x_n) = d(x_n,x) \to 0$ für $n \to \infty$ und $d(x_n,y) \to 0$ für $n \to \infty$ und so ist $d(x,y) = 0$ und es folgt $x = y$.

Beispiel 8. *Sei (X,d) ein metrischer Raum.*

a) *Sei $X = \mathbb{R}^m$ und $d(x,y) = \|x-y\|_2$ sowie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^m$. Wir bezeichnen mit x_j die j-te Komponente von x bzw. mit $(x_n)_j$ die j-te Komponente des Folgenglieds x_n. Dann gilt:*

$$x_n \xrightarrow{n\to\infty} x \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{\sum_{i=1}^{m}((x_n)_i - x_i)^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall_{i\in\{1,\dots,m\}} : (x_n)_i \xrightarrow{n\to\infty} x_i.$$

b) *Sei $X = C^0([0,1])$ sowie $d(x,y) = \max_{0\leq t\leq 1}|x(t)-y(t)|$. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} x_n \xrightarrow{n\to\infty} x \quad &\Leftrightarrow \quad \max_{0\leq t\leq 1}|x_m(t) - x(t)| \xrightarrow{m\to\infty} 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall_{\varepsilon>0}\exists_{n_\varepsilon\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_\varepsilon} : \max_{0\leq t\leq 1}|x_n(t)-x(t)| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \quad \forall_{\varepsilon>0}\exists_{n_\varepsilon\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_\varepsilon}\forall_{t\in[0,1]} : |x_n(t)-x(t)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Diese Eigenschaft heißt auch gleichmäßige Konvergenz.

c) *Sei $X = C^0([0,1])$ und $d(x,y) = \left(\int_0^1 |x(t)-y(t)|^p \,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}$ für $1 \leq p < \infty$. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} x_n \xrightarrow{n\to\infty} x \quad &\Leftrightarrow \quad \left(\int_0^1 |x_n(t)-x(t)|^p \,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall_{\varepsilon>0}\exists_{n_\varepsilon\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_\varepsilon} \int_0^1 |x_n(t)-x(t)|^p \,\mathrm{d}t < \varepsilon. \end{aligned}$$

Dies nennt man auch Konvergenz im p-ten Mittel.

Satz 1.2.1. *Sei $(X,\|\cdot\|)$ ein normierter Raum, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}$, $x_n \to x$, $y_n \to y$ und $a_n \to a$ für $n \to \infty$. Dann gilt:*

$$a_n x_n + y_n \xrightarrow{n\to\infty} ax + y.$$

Beweis. Mit der Dreiecksungleichung sowie der Homogenität gilt:

$$\begin{aligned} \|ax + y - (a_n x_n + y_n)\| &= \|ax - a_n x + a_n x - a_n x_n + y - y_n\| \\ &\leq \|ax - a_n x\| + \|a_n(x - x_n)\| + \|y - y_n\| \\ &\leq |a - a_n|\|x\| + |a_n|\|x - x_n\| + \|y_n - y\|. \end{aligned}$$

Nun ist a_n wegen Konvergenz insbesondere beschränkt und so $|a_n| \leq c < \infty$. Damit folgt aus den vorausgesetzten Konvergenzen die Behauptung.

□

Satz 1.2.2. *Sei (X, d) ein metrischer Raum und $M \subseteq X$. Dann gilt*

$$\overline{M} = \{x \in X \mid \exists_{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M} : x_n \xrightarrow{n\to\infty} x\}$$

Beweis. Sei $\tilde{M} = \{x \in X \mid \exists_{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M} : x_n \xrightarrow{n\to\infty} x\}$. Nun ist $\tilde{M} = \overline{M}$ zu zeigen:

$$\begin{aligned} x \in \tilde{M} &\Leftrightarrow \forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_\varepsilon \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_\varepsilon} : x_n \in B_\varepsilon(x) \\ &\Leftrightarrow \forall_{\varepsilon>0} : B_\varepsilon(x) \cap M \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \forall_{\varepsilon>0} : \neg(B_\varepsilon(x) \subseteq X \setminus M) \\ &\Leftrightarrow \neg\left(\exists_{\varepsilon>0} : B_\varepsilon(x) \subseteq X \setminus M\right) \\ &\Leftrightarrow x \notin (X \setminus M)^\circ \\ &\Leftrightarrow x \in X \setminus (X \setminus M)^\circ = \overline{M}. \end{aligned}$$

□

Definition 1.2.3. *Seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume.*

a) Eine Abbildung $T\colon X \to Y$ heißt stetig in $x_0 \in X$, *wenn $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta(\varepsilon,x_0)>0} \forall_{x\in X, d_X(x,x_0)<\delta} : d_Y(T(x), T(x_0)) < \varepsilon$ gilt.*

b) T heißt stetig in X, *falls T stetig in jedem $x \in X$ ist.*

c) T heißt Homöomorphismus, *falls T stetig und bijektiv ist und die Umkehrabbildung T^{-1} ebenfalls stetig ist.*

d) T heißt Isomorphismus, *falls T stetig, linear, bijektiv und T^{-1} ebenfalls stetig ist.*

e) T heißt Isometrie, *falls T stetig und bijektiv ist und außerdem für alle $x_1, x_2 \in X$ die Identität*

$$d_Y(T(x_1), T(x_2)) = d_X(x_1, x_2)$$

gilt.

Satz 1.2.3. *Für $T\colon (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ sind äquivalent:*

(i) T ist stetig für alle $x \in X$.

(ii) T ist folgenstetig für alle $x \in X$, d.h. $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ impliziert $T(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} T(x)$.

(iii) $\mathcal{O} \subseteq Y$ ist offen in (Y, d_Y) impliziert $T^{-1}(\mathcal{O})$ ist offen in (X, d_X).

(iv) $A \subseteq Y$ abgeschlossen in (Y, d_Y) impliziert $T^{-1}(A)$ abgeschlossen in (X, d_X).

Definition 1.2.4. *Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (X, d) heißt* Cauchy-Folge, *wenn*

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_\varepsilon \in \mathbb{N}} \forall_{n,m \geq n_\varepsilon} : d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

gilt.

Lemma 1.2.4. *Jede konvergente Folge in einem metrischen Raum ist eine Cauchy-Folge.*

Vollständigkeit

Definition 1.2.5. *Ein metrischer Raum (X, d) heißt* vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge in X gegen ein Element aus X konvergiert. Ein vollständiger, metrischer Raum heißt auch Fréchetraum, ein vollständiger normierter Raum heißt auch Banachraum und ein vollständiger Skalarproduktraum heißt auch Hilbertraum.*

Beispiel 9.

a) *$(\mathbb{R}, |\cdot|)$ und $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ sind Banachräume.*

b) *$(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ ist nicht vollständig. Betrachte dazu eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$. Eine Möglichkeit ist das Setzen von x_n als die Dezimaldarstellung von $\sqrt{2}$ bis zur n-ten Stelle. Dann ist jedes Folgenglied eine endliche Dezimalzahl und so aus $\mathbb{Q}$, aber der Grenzwert liegt in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.*

Definition 1.2.6. *Zwei Normen $\|\cdot\|_a$ und $\|\cdot\|_b$ heißen* äquivalent*, wenn jede Folge, die bezüglich der Norm $\|\cdot\|_a$ konvergiert, auch bezüglich $\|\cdot\|_b$ konvergiert und umgekehrt.*

Satz 1.2.5. *In einem endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum X sind alle Normen äquivalent. Insbesondere existieren für je zwei Normen $\|\cdot\|_a$ und $\|\cdot\|_b$ Konstanten $c_1, c_2 > 0$ mit*

$$c_1\|x\|_b \leq \|x\|_a \leq c_2\|x\|_b$$

für alle $x \in X$.

Beweis. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein endlichdimensionaler, normierter Raum sowie o.B.d.A. $X \neq \{0\}$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und eine Vektorraumbasis $\{e_i \mid i = 1, \dots, n\}$, $e_i \in X$. Für $x \in X$ gilt dann:

$$x = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \qquad \text{mit } a_k \in \mathbb{K}.$$

Definiere $\|x\|_\infty := \max_{1\leq k\leq n}|a_k|$. Dann ist $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm auf X. Außerdem gilt für alle $x \in X$:

$$\|x\| \leq \sum_{k=1}^{n}|a_k|\cdot\|e_k\| \leq \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n}\|e_k\|\right)}_{=:c_2>0}\cdot\|x\|_\infty$$

Wir zeigen nun die Existenz eines $c_1 > 0$ mit $c_1\|x\|_\infty \leq \|x\|$ und nehmen an, dass ein solches c_1 nicht existiert. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass ein

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} a_{k,n}e_k \qquad \text{mit} \qquad \|x_n\| \leq \frac{1}{n}\|x_n\|_\infty$$

existiert. Sei o.B.d.A $\|x_n\|_\infty = 1$. (Anderenfalls können wir x_n durch $\|x_n\|_\infty$ dividieren.) Damit existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$ sowie eine Teilfolge $(x_{n_\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$ mit $|a_{k_0,n_\ell}| = 1$ sowie $a_{k,n_\ell} \leq 1$ für alle $k \in \{1, \dots, n\}$ und $\lim_{\ell\to\infty} a_{k,n_\ell} = a_k$ für alle $k \in \{1, \dots, n\}$. Damit gilt $x = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \neq 0$, wenn $\|a_{k_0,n_\ell}\| = 1$, aber

$$\|x\| \leq \|x - x_{n_\ell}\| + \|x_{n_\ell}\| \leq c_2\|x - x_{n_\ell}\|_\infty + \frac{1}{n_\ell} \to 0$$

womit wir einen Widerspruch erhalten. Für zwei beliebige Normen erhält man die Äquivalenz via Vergleich mit der $\|\cdot\|_\infty$-Norm. $\square$

Korollar 1.2.6. *Jeder endlichdimensionale, normierte Raum ist ein Banachraum.*

Beweis. Aufgrund der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ ist $(X, \|\cdot\|_\infty)$ vollständig. Daher und aufgrund der Äquivalenz der Normen ist $(X, \|\cdot\|)$ für alle $\|\cdot\|$ vollständig. □

Satz 1.2.7. *Alle normierten Räume aus Beispiel* 4 *außer* $C_c^m(\Omega, \mathbb{K})$, $m \geq 0$, *sind vollständig.*

Beweis. Wir werden den Beweis nicht für alle angegebenen Räume durchführen. Die Ideen sind meistens sehr ähnlich und ein Teil der Beweise wird in den Übungen besprochen. Wir zeigen nun, dass $(C^0(K, \mathbb{K}), \|\cdot\|_{C^0})$ vollständig ist. Dazu sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $(C^0(K, \mathbb{K}), \|\cdot\|_{C^0})$. Damit gilt nach Definition der C^0-Norm für jedes $x \in K$ die Abschätzung

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_{C^0} \xrightarrow{m,n\to\infty} 0.$$

Nun ist $\mathbb{K}$ vollständig, es existiert also ein Grenzwert $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Wir zeigen nun, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch bezüglich der C^0-Norm gegen f konvergiert. Da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $C^0(K, \mathbb{K})$ ist, gilt:

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{n_\varepsilon\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_\varepsilon}\forall_{x\in\mathbb{K}} : |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

also insbesondere $\|f_n - f\|_{C^0} < \varepsilon$. Also konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f. Da der gleichmäßige Grenzwert stetiger Funktionen wieder stetig ist, folgt die Vollständigkeit von $(C^0(K, \mathbb{K}), \|\cdot\|_{C^0}\|)$.
Abschließend skizzieren wir noch, wieso die C_c^m-Räume nicht vollständig sind. Wir betrachten eine Folge von Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c^m(\Omega, \mathbb{K})$, deren Träger für $n \to \infty$ immer näher an den Rand von Ω heranrücken oder gegen ∞ streben. Die Grenzfunktion hat dann nicht mehr einen in Ω kompakten Träger. □

Satz 1.2.8. *Die Räume* $(\ell^p\|\cdot\|_p)$ *für* $1 \leq p \leq \infty$ *sind vollständig also Banachräume. Für* $p = 2$ *handelt es sich auch um einen Hilbertraum.*

Beweis. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in ℓ^p mit $x_n := (x_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$. Dann gilt

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{n_\varepsilon\in\mathbb{N}}\forall_{n,m\geq n_\varepsilon} : \|x_n - x_m\|_{\ell^p}^p = \sum_{k\in\mathbb{N}} |x_{n,k} - x_{m,k}|^p < \varepsilon^p.$$

Damit gilt aber auch

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{n_\varepsilon\in\mathbb{N}}\forall_{n,m\geq n_\varepsilon} : |x_{n,k} - x_{m,k}| < \varepsilon$$

und so ist $(x_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{K}$. Da $\mathbb{K}$ aber vollständig ist, existieren $x_k := \lim_{n\to\infty} x_{n,k} \in \mathbb{K}$. Sei nun $x := (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Dann gilt wegen der obigen Abschätzung

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{n_\varepsilon\in\mathbb{N}}\forall_{n,m\geq n_\varepsilon} \sum_{k=0}^{j} |x_{n,k} - x_{m,k}|^p < \varepsilon^p$$

für alle $j \in \mathbb{N}$. Der Grenzübergang $n \to \infty$ liefert dann $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ bezüglich der ℓ^p-Norm und $x \in \ell^p$. □

Satz 1.2.9. *Der Raum* $(C^0([0, 1]), \|\cdot\|)$ *mit* $\|f\| := \left(\int_0^1 |f(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$ *ist nicht vollständig.*

Beweis. Wir betrachten den Fall $p = 2$ und definieren

$$f_n(x) = \begin{cases} n^\alpha & x \le \frac{1}{n} \\ x^{-\alpha} & x > \frac{1}{n} \end{cases}$$

mit $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. Diese Folge ist eine Cauchy-Folge, die aber nicht konvergiert, da die Grenzfunktion in $x = 0$ nicht stetig ist. $\square$

Satz 1.2.10 (Monotone Konvergenz, Beppo Levi)**.** *Sei D eine λ-messbare Menge und seien $f_n \colon D \to \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$, $n \in \mathbb{N}$ messbare Funktionen, die für $n \to \infty$ monoton gegen eine Grenzfunktion f konvergieren. Dann ist auch f λ-messbar und es gilt*

$$\int_D f \,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_D f_n \,\mathrm{d}\lambda.$$

Satz 1.2.11 (Majorisierte Konvergenz, Lebesgue)**.** *Sei D eine λ-messbare Menge und seien $f_n \colon D \to \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$, $n \in \mathbb{N}$ messbare Funktionen. Existiert $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ fast überall und existiert eine λ-integrierbare Funktion g mit $|f_n| \le g$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist f λ-messbar und es gilt*

$$\int_D f \,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_D f_n \,\mathrm{d}\lambda,$$

sowie

$$\lim_{n\to\infty} \int_D |f - f_n| \,\mathrm{d}\lambda = 0.$$

Lemma 1.2.12. *Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann sind äquivalent:*

(i) *$(X, \|\cdot\|)$ ist ein Banachraum.*

(ii) *Jede absolut-konvergente Reihe $\sum_{i=1}^\infty a_i$ ist auch konvergent, d.h. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n a_i$ existiert in X.*

Satz 1.2.13. *Die Räume $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p})$ mit $1 \le p \le \infty$ sind Banachräume. Ferner ist $(L^2(\Omega), \|\cdot\|_{L^2})$ ein Hilbertraum.*

Beweis. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $L^p(\Omega)$ mit $c := \sum_{n=1}^\infty \|f_n\|_{L^p} < \infty$. Dann konvergiert $g_m := \sum_{n=1}^m |f_n|$ monoton gegen $g := \sum_{n=1}^\infty |f_n|$. Nach Satz 1.2.10 konvergiert $\|g_m\|_{L^p}$ monoton gegen $(\int_\Omega |g|^p \,\mathrm{d}\lambda)^{\frac{1}{p}}$. Wegen $\|g_m\|_{L^p} \le \sum_{n=1}^m \|f_n\|_{L^p} \le c < \infty$ für alle $m \in \mathbb{N}$, folgt $\|g\|_{L^p} < \infty$. Also ist $g \in L^p(\Omega)$ und außerdem ist $\sum_{n=1}^\infty |f_n(x)| < \infty$ λ-fast-überall. Damit konvergiert $h_m := \sum_{n=1}^m f_n$ λ-fast-überall punktweise gegen eine λ-messbare Funktion h. Ferner gilt $|h_m| \le g_m \le g$ für $g \in L^p(\Omega)$. Damit folgt nach Satz 1.2.11 $h \in L^p(\Omega)$ und $\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^m f_n = h$ bezüglich der L^p-Norm. Mit Lemma 1.2.12 folgt die Vollständigkeit von $L^p(\Omega)$. $\square$

Beispiel 10. *$(C_b^\infty(\Omega), d)$ mit*

$$d(f,g) = \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} \frac{\|\frac{d^n}{dx^n} f - \frac{d^n}{dx^n} g\|_{C^0}}{1 + \|\frac{d^n}{dx^n} f - \frac{d^n}{dx^n} g\|_{C^0}}$$

ist ein Fréchetraum.

Bemerkung 5. *Wir erhalten eine erweiterte Hierarchie von Strukturen:*

$$\begin{tikzcd}
\textit{Hilbertraum} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \textit{Skalarproduktraum} \arrow[d, Rightarrow] \\
\textit{Banachraum} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \textit{normierter Raum} \arrow[d, Rightarrow] \\
\textit{Fréchetraum} \arrow[r, Rightarrow] & \textit{metrischer Raum}
\end{tikzcd}$$

Die Umkehrungen gelten dabei im Allgemeinen nicht.

Satz 1.2.14. *Jeder normierte Raum $(X, \|\cdot\|_X)$ ist isometrisch isomorph zu einem normierten Raum $(X_*, \|\cdot\|_*)$. Es existiert also eine Abbildung $T\colon X \to X_*$, die ein Isomorphismus und eine Isometrie ist, wobei der Raum $(X_*, \|\cdot\|_*)$ ein dichter Teilraum eines Banachraums $(\tilde{X}, \|\cdot\|_{\tilde{X}})$ ist und bis auf isometrische Isomorphie eindeutig ist.*
$(\tilde{X}, \|\cdot\|_{\tilde{X}})$ heißt Vervollständigung *von $(X, \|\cdot\|_X)$.*

Beweis siehe [1].

Satz 1.2.15. *$C_c^m(\Omega)$ ist dicht in $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p})$ für $m \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ und $1 \leq p < \infty$. Damit kann $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p})$ mit der Vervollständigung von $C_c^m(\Omega)$ bezüglich der $\|\cdot\|_{L^p}$-Norm identifiziert werden.*

Satz 1.2.16 (Fixpunktsatz von Banach)**.** *Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, sowie $F\colon X \to X$ eine* Kontraktion, *d.h. es existiert ein $\lambda \in (0, 1)$ mit*

$$\forall_{x,y \in X} : d(F(x), F(y)) \leq \lambda d(x, y) < d(x, y).$$

Dann besitzt F einen eindeutigen Fixpunkt x^*, d.h. es gilt $F(x^*) = x^*$.

Kompaktheit

Satz 1.2.17. *Sei (X, d) ein metrischer Raum und $K \subseteq X$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *K ist* folgenkompakt, *d.h. jede Folge in K besitzt eine konvergente Teilfolge, deren Grenzwert in K liegt.*

(ii) *K ist* kompakt, *d.h. jede Überdeckung von K durch offene Mengen aus X besitzt eine endliche Teilüberdeckung. Existiert also $K \subseteq \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$ mit $\mathcal{O}_i \subseteq X$ offen, sowie I beliebige Indexmenge, existieren auch endlich viele $i_1, \ldots, i_n \in I$ mit $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{O}_{i_j}$.*

(iii) *(K, d) ist vollständig und K ist* präkompakt, *d.h. für alle $\varepsilon > 0$ existiert eine endliche Teilmenge $H \subseteq X$ mit $K \subseteq \bigcup_{x \in H} B_\varepsilon(x)$.*

Beweis siehe [1].

Satz 1.2.18. *Jede kompakte Teilmenge eines metrischen Raums ist beschränkt und abgeschlossen.*

Lemma 1.2.19 (Riesz)**.** *Sei* $(X, \|\cdot\|)$ *ein normierter Raum und* $Y \subsetneq X$ *ein abgeschlossener Unterraum. Dann gilt:*

$$\forall_{0<r<1} \exists_{x_r \in X \setminus Y} : (\|x_r\| = 1) \wedge (d(x_r, Y) := \inf_{y \in Y} \|x - y\| \geq r)$$

Beweis. Sei $x \in X \setminus Y$. Da Y abgeschlossen ist, ist $d(x, Y) > 0$. Nun sei $0 < r < 1$ fest. Dann existiert ein $z \in Y$ mit $\|x - z\| \leq \frac{1}{r} d(x, Y)$. Definiere $x_r := \frac{x-z}{\|x-z\|}$. Dann ist $\|x_r\| = 1$ und

$$d(x_r, Y) = \frac{1}{\|x - z\|} d(x - z, Y) = \frac{1}{\|x - z\|} d(x, Y) \geq r,$$

was die Behauptung beweist. □

Satz 1.2.20. *Sei* $(X, \|\cdot\|)$ *ein normierter Raum. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Jede beschränkte und abgeschlossene Teilmenge von X *ist kompakt in* X*.*

(ii) X *ist ein endlichdimensionaler Vektorraum.*

(iii) $\overline{B_1(0)}$ *ist kompakt in* X*.*

Beweis. Wir zeigen drei Implikationen und beweisen die Behauptung so via Ringschluss.

- (ii) $\Rightarrow$ (i):
  Sei $A \subseteq X$ beschränkt und abgeschlossen. Ferner sei $e_1, \ldots, e_n$ eine Basis von X und $(x_m)_{m \in \mathbb{N}} \subseteq A$ mit $x_m = \sum_{j=1}^n a_{m,j} e_j$. Dann existieren wegen der Normäquivalenz Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ mit $c_1 \|x\|_\infty \leq \|x\| \leq c_2 \|x\|_\infty$ für alle $x = \sum_{j=1}^n a_j e_j \in X$ mit $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |a_j|$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß existiert eine Teilfolge $(x_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$ so dass $(a_{m_k,j})_{k \in \mathbb{N}}$ für jedes $1 \leq j \leq n$ eine konvergente Folge ist. Daraus folgt, dass $(x_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$ in $(X, \|\cdot\|_\infty)$ konvergiert. Daraus folgt nun, dass $(x_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$ in $(X, \|\cdot\|)$ konvergiert.

- (i) $\Rightarrow$ (iii):
  trivial.

- (iii) $\Rightarrow$ (ii):
  Wir nehmen an, dass $\dim(X) = \infty$ gilt. Dann existieren Unterräume $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \ldots$ mit $\dim(X_n) = n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Da jeder dieser Unterräume endlich dimensional ist, ist $(X_n, \|\cdot\|)$ vollständig und so ist X_n abgeschlossen in $(X, \|\cdot\|)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach dem Lemma von Riesz in 1.2.19 existieren nun $x_n \in X_{n+1} \setminus X_n$ mit $\|x_n\| = 1$ und $d(x_n, X_n) \geq \frac{1}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist insbesondere $\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2}$ für alle $n > m$ und so hat $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ keine konvergente Teilfolge, was im Widerspruch zur Kompaktheit von $\overline{B_1(0)}$ steht.

□

Satz 1.2.21. *Sei* (X, d) *ein metrischer Raum und* $\emptyset \neq K \subseteq X$ *kompakt. Dann gibt es zu jedem Punkt* $y \in X$ *einen Punkt* $x_0 \in K$*, der von* y *den kleinsten Abstand hat. Der Punkt* x_0 *heißt dann* beste Approximation *oder* bestapproximierendes Element *von* y *in* K*.*

Beweis. Wegen der Nichtnegativität von d ist die Menge $\{d(y,x) \mid x \in K\}$ nach unten beschränkt. Daher existiert $\mu := \inf\{d(y,x) \mid x \in K\}$. Also gilt

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \exists_{x_n \in K} : \mu \leq d(y, x_n) < \mu + \frac{1}{n}$$

nach Definition des Infimums. Damit ist $\lim_{n\to\infty} d(y, x_n) = \mu$. Wegen Kompaktheit von K, besitzt die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$ für ein $x_0 \in K$. Damit erhalten wir für alle $k \in \mathbb{N}$ die Ungleichungen

$$\mu \leq d(y, x_0) \leq d(y, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_0)$$

und daher

$$\mu \leq d(y, x_0) \leq \lim_{k\to\infty} d(y, x_{n_k}) + \lim_{k\to\infty} d(x_{n_k}, x_0) = \mu + 0.$$

Folglich muss $d(y, x_0) = \mu$ sein. □

Bemerkung 6. *In nicht kompakten Mengen gibt es im Allgemeinen kein bestapproximierendes Element. Beispielsweise für $y = -1$ in*

$$M_1 = (0,1] \quad \text{oder} \quad M_2 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}\right].$$

Satz 1.2.22 (Arzelà, Ascoli)**.** *Sei (K,d) ein kompakter, metrischer Raum sowie $A \subseteq C^0(K,\mathbb{K})$. Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) A ist relativ kompakt *in $C^0(K,\mathbb{K})$, d.h. $\overline{A}$ ist kompakt in $C^0(K,\mathbb{K})$.*

(ii) A ist beschränkt (d.h. $c := \sup_{f\in A}\|f\|_{C^0} < \infty$) und gleichgradig stetig. *Letzteres bedeutet, dass für alle $x \in K$ und alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta(x) > 0$ existiert, so dass für alle $f \in A$ und alle $y \in B_{\delta(x)}(x)$ die Ungleichung $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ gilt.*

Beweis.

- (i) ⇒ (ii):
  Sei A relativ kompakt in $C^0(K,\mathbb{K})$. Dann ist A beschränkt, da $\overline{A}$ als kompakte Menge beschränkt ist und $A \subseteq \overline{A}$ gilt. Wir zeigen nun die gleichgradige Stetigkeit. Sei $x \in K$ und $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Dann lässt sich aus einer Überdeckung von $\overline{A}$ als kompakte Menge eine endliche Teilüberdeckung auswählen, es gilt also insbesondere

  $$A \subseteq \overline{A} \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} B_\varepsilon(f_k)$$

  für gewisse $f_1, \ldots, f_n \in A$. Wähle nun $\delta > 0$ so, dass für alle $y \in B_\delta(x)$ gilt: $\max_{1\leq k\leq n}|f_k(x) - f_k(y)| < \varepsilon$. Sei nun $f \in A$ und $y \in B_\delta(x)$. Dann folgt die Existenz eines $k \in \{1, \ldots, n\}$ mit $f \in B_\varepsilon(f_k)$ und so folgt

  $$\forall_{y\in B_\delta(x)} : |f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) + f_k(y)| + |f_k(y) - f(y)| < 3\varepsilon$$

  und damit die gleichgradige Stetigkeit.

- (ii) $\Rightarrow$ (i):
  Sei $\varepsilon > 0$, wegen der nachfolgenden Bemerkung 7 existiert ein $\delta > 0$ mit

$$\exists_{\xi_1,\ldots,\xi_k\in\mathbb{K}}\exists_{x_1,\ldots,x_m\in K} : B_c(0) \subseteq \bigcup_{\ell=1}^{k} B_\varepsilon(\xi_\ell) \subseteq \mathbb{K} \quad \text{und } K \subseteq \bigcup_{\ell=1}^{m} B_\delta(x_\ell)$$

  für $c := \sup_{f\in A}\|f\|_{C^0}$. Nun definiere für jede Abbildung $\sigma\colon \{1,\ldots,m\} \to \{1,\ldots,k\}$ die Menge

$$A_\sigma = \{f \in A \,|\, \forall_{1\leq\ell\leq m} : |f(x_\ell) - \xi_{\sigma(\ell)}| < \varepsilon\}$$

  und wähle Funktionen $f_\sigma \in A_\sigma$, falls $A_\sigma \neq \emptyset$. Sei $f \in A$. Dann existiert ein σ mit $f \in A_\sigma$ und für alle $x \in K$ existiert ein ℓ mit $x \in B_\delta(x_\ell)$ mit

$$|f(x)-f_\sigma(x)| \leq |f(x)-f(x_\ell)|+|f(x_\ell)-\xi_{\sigma(\ell)}|+|\xi_{\sigma(\ell)}-f_\sigma(x_\ell)|+|f_\sigma(x_\ell)-f_\sigma(x)| < 4\varepsilon$$

  wegen gleichgradiger Stetigkeit bzw. $f \in A_\sigma$ und $f_\sigma \in A_\sigma$. Damit ist $A \subseteq \bigcup_\sigma B_{4\varepsilon}(f_\sigma)$ und es folgt nach Satz 1.2.17 die Kompaktheit von $\overline{A}$ und damit die relative Kompaktheit von A.

$\square$

Bemerkung 7. *Da K kompakt ist, gilt $C^0(K,\mathbb{K}) = C^0_{unif}(K,\mathbb{K})$, wodurch $\delta(x)$ unabhängig von x gewählt werden kann. Sei dazu $\varepsilon > 0$ zu $x \in K$ und wähle $\delta(x)$ wie in Satz 1.2.21(ii). Wegen Kompaktheit von K, existieren $x_1,\ldots,x_n \in K$ mit $K \subseteq \bigcup_{k=1}^n B_{\frac{\delta(x_k)}{2}}(x_k)$ mit $\delta(x_k)$ wie in Satz 1.2.21 (ii). Definiere nun $\delta := \min_{1\leq k\leq n} \frac{\delta(x_k)}{2}$, dann gilt wegen Existenz eines k mit $x \in B_{\frac{\delta(x_k)}{2}}(x_k)$ und $y \in B_{\delta(x_k)}(x_k)$ auch*

$$\forall_{y\in B_\delta(x)} : |f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_k)| + |f(x_k) + f(y)| < 2\varepsilon$$

Beispiel 11. *Sei $A = B_1(0)$ in $(C^1([-1,1]), \|\cdot\|_{C^1})$. Wegen $\|f\|_{C^0} \leq \|f\|_{C^1} \leq 1$ ist A beschränkt, sowie via*

$$\forall_{f\in A} : |f(x) - f(y)| \leq \sup_{\xi\in[-1,1]} |f'(\xi)| \cdot |x-y| \leq |x-y|$$

auch gleichgradig stetig. Damit ist A relativ kompakt in $(C^0([-1,1]), \|\cdot\|_{C^0})$.

Satz 1.2.23 (Fréchet, Kolmogorov, Riesz)**.** *Sei $1 \leq p < \infty$. Dann ist $A \subseteq L^p(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ genau dann relativ kompakt, wenn die folgenden drei Eigenschaften erfüllt sind:*

(i) $\sup_{f\in A}\|f\|_{L^p}$ *ist endlich.*

(ii) Für ein $h \in \mathbb{R}^n$, $|h| \to 0$ gilt $\sup_{f\in A}\|f(\cdot+h) - f(\cdot)\|_{L^p} \to 0$.

(iii) Es gilt $\sup_{f\in A}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n\setminus B_R(0))} \to 0$ *für $R \to \infty$.*

Beweis siehe [1].

1.3. Lineare Abbildungen in normierten Räumen

Satz 1.3.1. *Seien $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ normierte Räume und sei $T\colon E \to F$ eine lineare Abbildung. Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent:*

(i) T *ist* stetig für alle $x \in E$.

(ii) T *ist* stetig in 0.

(iii) *Für eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ mit $x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ folgt $Tx_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.*

(iv) *Es existiert ein $\alpha \geq 0$ mit $TB_E \subseteq \alpha B_F$. Dabei ist $B_E := \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$ und $\alpha B_F := \{y \in F \mid \|y\| \leq \alpha\}$.*

(v) T *ist* beschränkt, *d.h., es existiert ein $\beta \geq 0$ mit $\|Tx\|_F \leq \beta\|x\|_E$ für alle $x \in E$.*

Beweis. Die Implikationen (i) ⇒ (ii) ⇒ (iii) ergeben sich direkt aus der Definition der Stetigkeit, da für jede lineare Abbildung $T(0) = 0$ gilt.

- (iii) ⇒ (v):
  Wir nehmen an, dass (v) nicht gilt. Dann folgt

  $$\forall_{n\in\mathbb{N}}\exists_{x_n\in E} : \|Tx_n\| > n \cdot \|x_n\|_E,$$

  da keine feste Schranke existiert. Wir definieren nun $y_n := \frac{x_n}{\|Tx_n\|_F}$ und erhalten

  $$\|Ty_n\|_F = 1 > n \cdot \|y_n\|_E$$

  und so $\|y_n\|_E < \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit folgt $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ aber es gilt $\|Ty_n\|_F = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, womit wir einen Widerspruch zu (iii) erhalten.

- (v) ⇒ (iv):
  Wähle $\alpha = \beta$.

- (iv) ⇒ (i):
  Sei $x \in E$, $\varepsilon > 0$ sowie $\delta := \frac{\varepsilon}{2\alpha}$, dann gilt:

  $$T(x + \delta B_E) = Tx + \delta TB_E \subseteq Tx + \delta\alpha B_F \subseteq Tx + \frac{\varepsilon}{2}B_F.$$

□

Definition 1.3.1 (Dualraum)**.** *Sei E ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $(E, \|\cdot\|_E)$ ein normierter Raum. Dann heißt $E' := \{T\colon E \to \mathbb{K} \mid T$ linear und stetig$\}$ der* Dualraum *von E.*

Beispiel 12.

a) *Sei $E = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$, $F = (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_2)$ für $n, m \in \mathbb{N}$. Dann sind alle linearen Abbildungen $T\colon E \to F$ stetig und können durch Matrizen dargestellt werden. Dasselbe gilt auch für alle anderen Normen, wegen der Äquivalenz von Normen.*

b) Sei $E = (C^0([a,b]), \|\cdot\|_{C^0})$ sowie $T\colon E \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$Tf = \int_a^b f(s)\,\mathrm{d}s, \quad (-\infty < a \le b < \infty).$$

Die Abbildung T ist stetig, linear und damit im Dualraum E' enthalten. Außerdem ist $V\colon E \to F$ definiert durch

$$Vf(t) = \int_a^t f(s)\,\mathrm{d}s \qquad \textit{für } t \in [a,b]$$

linear und stetig, denn es gilt $\|Vf\|_{C^0} \le (b-a)\cdot\|f\|_{C^0}$. Ferner ist V stetig als Abbildung von $(C^0([a,b]), \|\cdot\|_{C^0})$ nach $(C^1([a,b]), \|\cdot\|_{C^1})$.

Definition 1.3.2 (Raum der stetigen linearen Operatoren)**.** *Seien E und F normierte Räume. Wir definieren*

$$\mathit{Lin}(E,F) := \{T\colon E \to F \mid T \textit{ ist linear und stetig}\}$$

und bezeichnen diese Menge als den Raum der stetigen linearen Operatoren.

Satz 1.3.2. *Sei $T \in \mathit{Lin}(E,F)$, sowie*

$$\|T\| := \sup_{x\in B_E} \|Tx\|_F = \sup_{x\in B_E^\circ} \|Tx\|_F = \sup_{x\in\partial B_E} \|Tx\|_F = \sup_{\substack{x\in E\\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E}.$$

Dann ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathit{Lin}(E,F)$, die sogenannte Operatornorm. *Ist F vollständig, dann ist auch $(\mathit{Lin}(E,F), \|\cdot\|)$ vollständig. Insbesondere ist der Dualraum E' vollständig.*

Beweis. $\mathrm{Lin}(E,F)$ ist ein Vektorraum vermöge $(S+T)x := Sx + Tx$ und $(\alpha S)x := \alpha Sx$. Wir weisen nun zunächst die Normeigenschaften für $\|\cdot\|$ nach.

(i) Es gilt

$$\|T\| = 0 \Leftrightarrow \forall_{x\in E} : Tx = 0 \Leftrightarrow T = 0,$$

sowie

$$\forall_{x\in E} : \|Tx\| \ge 0 \Rightarrow \|T\| \ge 0.$$

(ii) Die Homogenität $\|\alpha T\| = |\alpha|\|T\|$ folgt direkt aus der Definition von $\|T\|$ und der entsprechenden Eigenschaft von $\|Tx\|_F$.

(iii) Die Dreiecksungleichung folgt via

$$\begin{aligned}\|(S+T)x\|_F &\le \|Sx\|_F + \|Tx\|_F \\ &\le \|S\|\cdot\|x\|_E + \|T\|\cdot\|x\|_E \\ &= (\|S\| + \|T\|)\cdot\|x\|_E \\ &= (\|S\| + \|T\|)\cdot\|x\|_E\end{aligned}$$

für alle $x \in E$. Damit gilt diese Ungleichung auch für das Supremum und wir erhalten

$$\|S+T\| \le \|S\| + \|T\|$$

wie gewünscht.

Sei nun F vollständig und $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathrm{Lin}(E,F)$, dann gilt für alle $x \in E$ die Ungleichung

$$\|T_m x - T_n x\|_F \leq \|T_m - T_n\| \cdot \|x\|_E \xrightarrow{m,n\to\infty} 0.$$

Also ist auch für jedes $x \in E$ die Folge $(T_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in F. Da F vollständig ist, existiert $Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$ für $x \in E$. Wir definieren

$$T\colon E \to F,\ x \mapsto Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x.$$

Diese Abbildung ist linear (folgt aus den Grenzwertsätzen) und für $\beta_m = \sup_{n\geq m}\|T_n - T_m\|$ gilt

$$\|Tx - T_m x\|_F = \lim_{n\to\infty} \|T_n x - T_m x\|_F \leq \beta_m \cdot \|x\|_E.$$

Somit ist $T - T_m$ und $T = T - T_m + T_m$ beschränkt, deshalb stetig und es gilt
$\|T - T_m\| \leq \beta_m \xrightarrow{m\to\infty} 0$.

□

Beispiel 13. *Sei $\psi \in C^0([0,1]\times[0,1])$. Dann ist*

$$T\colon f \mapsto Tf \quad \textit{mit} \quad Tf(x) = \int_0^1 \psi(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y$$

eine stetige, lineare Abbildung und es gilt

$$\|T\| = \sup_{x\in[0,1]} \int_0^1 |\psi(x,y)|\,\mathrm{d}y.$$

Lemma 1.3.3. *Seien E, F, G normierte Räume und $B \in \mathit{Lin}(E,F)$, $A \in \mathit{Lin}(F,G)$, dann gilt:*

(i) $A \circ B \in \mathit{Lin}(E,G)$ *und* $\|A \circ B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

(ii) Die Abbildungen $M_r\colon \mathit{Lin}(E,F) \to \mathit{Lin}(E,G), T \mapsto A\circ T$ und $M_\ell\colon \mathit{Lin}(F,G) \to \mathit{Lin}(E,G), S \mapsto S \circ B$ sind linear und stetig. Ferner gilt

$$\|M_r\| \leq \|A\| \quad \textit{und} \quad \|M_\ell\| \leq \|B\|.$$

Satz 1.3.4. *Sei E ein Banachraum und $T \in \mathit{Lin}(E,E)$ mit $\limsup_{n\to\infty}\|T^n\|^{\frac{1}{n}} < 1$ (zum Beispiel, falls $\|T\| < 1$ ist). Dann ist $\mathit{Id} - T$ bijektiv und es gilt*

$$(\mathit{Id} - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n \in \mathit{Lin}(E,E)$$

und die Reihe konvergiert bezüglich der Operatornorm. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$ heißt Neumannsche Reihe und verallgemeinert die geometrische Reihe.

Beweis. Nach Voraussetzung existiert ein $m \in \mathbb{N}$ sowie ein $\theta < 1$ so, dass für alle $n \geq m$ die Ungleichung $\|T^n\|^n < \theta^n$ erfüllt ist. Aufgrund des Konvergenzverhaltens der geometrischen Reihe ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}\|T^n\|$ konvergent, also $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$ absolut konvergent. Da E und so auch $\mathrm{Lin}(E,E)$ vollständig sind, ist $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$ ebenfalls konvergent in $\mathrm{Lin}(E,E)$. Unter Ausnutzung von Lemma 1.3.3 erhalten wir

$$(\mathrm{Id} - T)\sum_{n=0}^{\infty} T^n = \lim_{m\to\infty} (\mathrm{Id} - T)\sum_{n=0}^{m} T^n = \lim_{m\to\infty} (\mathrm{Id} - T^{m+1}) = \mathrm{Id}.$$

Analog lässt sich $\left(\sum_{n=0}^{\infty} T^n\right)(\mathrm{Id} - T) = \mathrm{Id}$ zeigen.

□

Satz 1.3.5.

a) *Sei* $E = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$, $A \in Lin(E,E)$ *beschrieben durch die* $n \times n$*-Matrix* $A = (a_{ij})_{ij=1,\dots,n}$. *Dann kann die zugehörige Operatornorm berechnet werden durch*

$$\|A\| = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|.$$

Die Operatornorm heißt dann auch Zeilensummennorm $\|A\|_\infty$.

b) *Sei* $E = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ *mit* $A \in Lin(E,E)$. *Dann kann die zugehörige Operatornorm berechnet werden durch*

$$\|A\| = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|.$$

Die Operatornorm heißt dann auch Spaltensummennorm $\|A\|_1$.

c) *Sei* $E = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$, $A \in Lin(E,E)$, *Dann sei die zugehörige Operatornorm gleich der Wurzel aus dem größten Eigenwert der Matrix* $A^t A$. *Die Operatornorm heißt dann auch* Spektralnorm $\|A\|_2$.

1.4. Differentation und Integration in Banachräumen

Definition 1.4.1. *Seien* $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ *Banachräume,* $U \subseteq X$ *offen und* $F\colon X \to Y$ *eine Abbildung.*

a) F *heißt* Gâteaux-differenzierbar, *wenn die sogenannte* Gâteaux-Ableitung $DF(x)[v]$ *von* F *an der Stelle* x *in Richtung* $v \in X$, *welche definiert ist durch*

$$DF(x)[v] := \lim_{h \to \infty} \frac{F(x+hv) - F(x)}{h}$$

wobei $h \in \mathbb{R}$ *für alle* $v \in X$ *existiert.*

b) F *heißt* Fréchet-differenzierbar *in* $x \in U$, *wenn eine stetige, lineare Abbildung* $JF(x)\colon X \to Y$ *existiert, so dass*

$$\lim_{h \to \infty} \frac{\|F(x+h) - F(x) - JF(x)[h]\|_Y}{\|h\|_X} = 0$$

gilt, wobei $h \in X$ *ist.*

Bemerkung 8.

a) *Die Gâteaux-Ableitung ist die Verallgemeinerung der Richtungsableitung aus der reellen Differentialrechnung. Die Fréchet-Differenzierbarkeit ist die Verallgemeinerung der totalen Differenzierbarkeit aus der reellen Differentialrechnung.*

b) *Sei* $X = \mathbb{R}$, *dann gilt* $JF(x) = DF(x)[1]$, *d.h.* $JF(x)[v] = vDF(x)[1]$ *für alle* $v \in \mathbb{R}$.

Bemerkung 9. *Mit Hilfe der Begriffe der Gâteaux-Differenzierbarkeit und der Fréchet-Differenzierbarkeit lassen sich zentrale Sätze aus der reellen Differentialrechnung, z.B. der*

Satz von Taylor, der Satz über die implizite Funktion oder die Sätze über Extremstellen (mit und ohne Nebenbedingungen) auf den Fall von Banachräumen verallgemeinern.

Definition 1.4.2. *Sei $a, b \in \mathbb{R}$, $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum und $f\colon [a,b] \to X$ eine Abbildung.*

a) Sei $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ mit $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ eine Zerlegung des Intervalls $[a,b]$ und $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ mit $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Dann heißt $S(f, P, \xi) := \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) f(\xi_k)$ Riemannsumme *von f zur Partition P.*

b) Die Abbildung f heißt Riemann-integrierbar*, wenn der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} S(f, P(n), \xi(n))$ für alle Folgen $(P(n), \xi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ von Partitionen $P(n)$ und n-Tupeln $\xi(n)$, $n \in \mathbb{N}$ für die $\lim_{n\to\infty} |P(n)| = 0$ gilt, wobei $|P| := \max\{x_k - x_{k-1} \,|\, 1 \leq k \leq n\}$ die Feinheit der Partition ist, existiert. In diesem Fall nennt man*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{|P|\to 0} S(f, P, \xi)$$

das Riemann-Integral *über f von a bis b.*

Bemerkung 10. *Mit Hilfe dieses Integralbegriffs, lassen sich zentrale Sätze aus der reellen Integralrechnung auf den Fall von Banachräumen verallgemeinern. Zum Beispiel erhält man den folgenden Satz:*
Sei $a, b \in \mathbb{K}$ und $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum. Dann ist jede stetige Funktion $f\colon [a,b] \to X$ Riemann-integrierbar.
Ferner lässt sich mit Hilfe dieses Integralbegriffs der lokale Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf auf den Fall von gewöhnlichen Differentialgleichungen mit Werten in Banachräumen verallgemeinern.

2. Hilbertraumtheorie

2.1. Orthogonale Projektionen

Satz 2.1.1. *Sei H ein Hilbertraum und $A \subseteq H$ abgeschlossen, nichtleer und konvex (d.h. $x, y \in A$ impliziert $\lambda x + (1-\lambda)y \in A$ für alle $\lambda \in [0,1]$). Dann existiert zu jedem $x_0 \in H$ genau ein $y_0 \in A$ mit $\|x_0 - y_0\| = \inf_{y\in A}\|x_0 - y\|$.*

Beweis. Wegen der Nichtnegativität der Norm ist $d = \inf_{y\in A}\|x_0 - y\| \in \mathbb{R}$. Nach Definition des Infimums existiert eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ mit $\lim_{n\to\infty}\|x_0 - y_n\| = d$. Wegen der Konvexität von A ist wegen $y_m, y_n \in A$ auch $\frac{1}{2}(y_m + y_n) \in A$ und nach der Parallelogrammgleichung gilt

$$\begin{aligned} 4d^2 + \|y_m - y_n\|^2 &\leq 4\|x_0 - \frac{1}{2}(y_m + y_n)\|^2 + \|y_m - y_n\|^2 \\ &= 2\|x_0 - y_m\|^2 + 2\|x_0 - y_n\|^2, \end{aligned}$$

wobei die rechte Seite für $n, m \to \infty$ gegen $4d^2$ konvergiert. Also konvergiert $\|y_m - y_n\|^2$ für $n, m \to \infty$ gegen Null und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge. Wegen Vollständigkeit von H existiert ein $y_0 = \lim_{n\to\infty} y_n$ und wegen Abgeschlossenheit von A gilt wegen $y_n \in A$ auch $y_0 \in A$. Wegen Stetigkeit der Norm erhalten wir dann $\|x_0 - y_0\| = \lim_{n\to\infty}\|x_0 - y_n\| = d$ und so ist y_0 bestapproximierend.
Für die Eindeutigkeit sei $y_1 \in A$ mit $\|x_0 - y_1\| = d$. Wegen Konvexität von A ist auch $\frac{1}{2}(y_0 + y_1) \in A$ und mit der Parallelogrammgleichung erhalten wir analog

$$\begin{aligned} 4d^2 + \|y_0 - y_1\|^2 &\leq 4\|x_0 - \frac{1}{2}(y_0 + y_1)\|^2 + \|y_0 - y_1\|^2 \\ &= 2\|x_0 - y_0\|^2 + 2\|x_0 - y_1\|^2 \\ &= 4d^2 \end{aligned}$$

und so folgt $\|y_0 - y_1\| = 0$ und damit $y_1 = y_0$. □

Satz 2.1.2. *Sei M ein Untervektorraum eines Hilbertraums H. Dann ist $y_0 \in M$ genau dann bestapproximierend an ein Element $x_0 \in H$, wenn $\langle x_0 - y_0, y\rangle = 0$ für alle $y \in M$ gilt. y_0 heißt dann* orthogonale Projektion *von x_0 auf M.*

Beweis. Sei $y_0 \in M$ bestapproximierend an $x_0 \in H$. Dann gilt für alle $y \in M$ und alle $\alpha \in \mathbb{K}$, dass $y_0 + \alpha y \in M$ ist und

$$\|x_0 - y_0\|^2 \leq \|x_0 - y_0 - \alpha y\|^2 = \|x_0 - y_0\|^2 - 2(\mathrm{Re}\,(\alpha\langle y, x_0 - y_0\rangle)) + |\alpha|^2 \cdot \|y\|^2$$

und daher

$$0 \leq -2(\mathrm{Re}\,(\alpha\langle y, x_0 - y_0\rangle)) + |\alpha|^2 \cdot \|y\|^2$$

gilt. Sei $\alpha = \varepsilon > 0$. Nach Division durch ε und Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ erhält man $\mathrm{Re}\,(\langle y, x_0 - y_0\rangle) \leq 0$. Analog erhält man mit $\alpha = \mathrm{i}\varepsilon$, $\varepsilon > 0$ und $\varepsilon \to 0$, dass $\mathrm{Im}\,(\langle y, x_0 - y_0\rangle) \leq 0$ ist. Da mit $y \in M$ auch $-y \in M$ ist, folgt $\langle y, x_0 - y_0\rangle \geq 0$ und somit $\langle y, x_0 - y_0\rangle = 0$.

Sei umgekehrt $\langle x_0 - y_0, y \rangle = 0$ für alle $y \in M$ und ein $y_0 \in M$, wobei ohne Einschränkung $x_0 \notin M$ gilt. Dann erhalten wir für alle $y' \in M$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|x_0 - y_0\|^2 \\ &= \langle x_0 - y_0, x_0 - y_0 \rangle \\ &= \langle x_0 - y_0, x_0 - y_0 - y' + y' \rangle \\ &= \langle x_0 - y_0, x_0 - y' \rangle + \langle x_0 - y_0, y' - y_0 \rangle \\ &= \langle x_0 - y_0, x_0 - y' \rangle \end{aligned}$$

wegen $y' - y_0 \in M$. Also ist

$$\|x_0 - y_0\|^2 = |\langle x_0 - y_0, x_0 - y' \rangle| \leq \|x_0 - y_0\| \|x_0 - y'\|$$

und so insbesondere $\|x_0 - y_0\| \leq \|x_0 - y'\|$ für alle $y' \in M$. Also ist y_0 bestapproximierend an x_0. □

Theorem 2.1.3 (Projektionssatz)**.** *Sei M ein abgeschlossener Unterraum eines Hilbertraums H. Dann existieren zu $x_0 \in H$ genau zwei Punkte $y_0 \in M$ und $y_1 \in M^\perp := \{y \in H \,|\, \forall_{x \in M} \langle y, x \rangle = 0\}$, so dass $x_0 = y_0 + y_1$ gilt. Das bedeutet $H = M \oplus M^\perp$ ist die direkte Summe von M und $M^\perp$.*

Beweis. Sei zunächst $x_0 \in M$. Wählen wir $y_0 = x_0$ und $y_1 = 0$, ist die Aussage bereits gezeigt. Sei nun $x_0 \notin M$. Nach Satz 2.1.1 existiert ein bestapproximierendes Element $y_0 \in M$. Setzt man $y_1 = x_0 - y_0$, so gilt nach Satz 2.1.2, dass $y_1 \in M^\perp$ und offensichtlich $x_0 = y_0 + y_1$ ist. Außerdem sind y_0 und y_1 eindeutig bestimmt. Denn sei $x_0 = y_0 + y_1 = y_0' + y_1'$ mit $y_0' \in M$ und $y_1' \in M^\perp$ und daher $M \ni y_0 - y_0' = y_1' - y_1 \in M^\perp$. Wegen $M \cap M^\perp = \{0\}$ folgt $y_0 - y_0' = y_1 - y_1' = 0$. □

Korollar 2.1.4. *Zu jedem abgeschlossenen Unterraum M eines Hilbertraums H mit $M \neq H$, existiert ein $z_0 \in H$ mit $z_0 \neq 0$ und $z_0 \perp M$.*

Beweis. Sei $x_0 \in H \setminus M \neq \emptyset$, dann existieren nach Theorem 2.1.3 $y_0 \in M$, $z_0 \in M^\perp$ mit $x_0 = y_0 + z_0$. Wegen $x_0 \neq y_0$ folgt $z_0 \neq 0$. □

Definition 2.1.1. *Sei $I \neq \emptyset$ beliebige Indexmenge und $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Skalarproduktraum. Eine Familie $(e_i)_{i \in I}$, $e_i \in E$ heißt* Orthonormalsystem *(kurz: ONS), falls für alle $i, j \in I$*

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j} \quad \text{mit} \quad \delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

gilt.

Lemma 2.1.5. *Sei $(e_i)_{i \in I}$ ein endliches Orthonormalsystem in E. Dann liefert die Zuordnung $P_I : x \mapsto \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i$ die orthogonale Projektion von x auf $E_I := \text{span}\{e_i \,|\, i \in I\}$ und es gilt für alle $x \in E$ die Identität*

$$\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2 + \|x - P_I(x)\|^2.$$

Außerdem sind die $(e_i)_{i \in I}$ linear unabhängig.

Beweisidee. Man zeigt $x - P_I(x) \perp \operatorname{span}\{e_i \mid i \in I\}$ mit Hilfe des Skalarprodukts und erhält so, dass P_I die orthogonale Projektion ist. Die obige Identität folgt aus dem Satz von Pythagoras. Für die lineare Unabhängigkeit betrachtet man

$$\left\|\sum_{i\in I} \lambda_i e_i\right\|^2 = \left\langle \sum_{i\in I} \lambda_i e_i, \sum_{j\in I} \lambda_j e_j \right\rangle = \sum_{i\in I} |\lambda_i|^2.$$

□

Lemma 2.1.6 (Besselsche Ungleichung)**.** *Sei $(e_i)_{i\in I}$ ein abzählbares Orthonormalsystem in $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, dann gilt für alle $x \in E$ die Ungleichung*

$$\sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Beweis. Folgt direkt aus der Identität in Lemma 2.1.5 und der Nichtnegativität von Normen. □

Bemerkung 11. *Man kann die Gültigkeit der Besselschen Ungleichung auch allgemeiner für beliebige Orthonormalsysteme beweisen.*

Satz 2.1.7. *Für jedes Orthonormalsystem $(e_i)_{i\in I}$ mit $I \subseteq \mathbb{N}$ in einem Skalarproduktraum $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) $\operatorname{span}\{e_i \mid i \in I\}$ *ist dicht in E.*

(2) Für alle $x \in E$ gilt $x = \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle e_i$.

(3) Für alle $x \in E$ gilt Gleichheit in der Besselschen Ungleichung, d.h.

$$\|x\|^2 = \sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2.$$

Diese Identität ist auch als Parsevalsche Gleichung *bekannt.*

Ist E zusätzlich ein Hilbertraum, so sind die obigen drei Aussagen äquivalent zu

(4) Das Orthonormalsystem $(e_i)_{i\in I}$ ist maximal*, d.h. es gibt kein $y \in E$, $y \notin \{e_i, \mid i \in I\}$, $y \neq 0$ mit $\langle y, e_i\rangle = 0$ für alle $i \in I$.*

Beweis.

- (1) $\Rightarrow$ (3):
  Seien $x \in E$ und $\varepsilon > 0$ gegeben, dann gibt es nach (1) eine endliche Teilmenge $M_0 \subseteq I$ sowie ein $y \in E_{M_0} = \operatorname{span}\{e_i \mid i \in M_0\}$ mit $\|x - y\| \leq \varepsilon$. Ist M mit $M_0 \subseteq M \subseteq I$ eine weitere endliche Teilmenge von I, gilt $E_{M_0} \subseteq E_M$. Also folgt mit $\|x\|^2 = \sum_{i\in M} |\langle x, e_i\rangle|^2 + \|x - P_M x\|^2$ die Ungleichung

  $$0 \leq \|x\|^2 - \sum_{i\in M} |\langle x, e_i\rangle|^2 = \|x - P_M x\|^2 \leq \|x - y\|^2 \leq \varepsilon^2.$$

  Mit $\varepsilon \to 0$ ergibt sich (3).

- (3) ⇒ (2) ⇒ (1):
  Nach der Gleichung aus Lemma 2.1.5 gilt für jede endliche Teilmenge $M \subseteq I$ die Identität
$$\left\| x - \sum_{i \in M} \langle x, e_i \rangle e_i \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i \in M} |\langle x, e_i \rangle|^2$$
  für alle $x \in E$. Also impliziert (3) die Aussage (2) und da jede Partialsumme von $\sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i$ in $\operatorname{span}\{e_i \mid i \in I\}$ liegt, folgt aus (2) auch die Aussage (1).

- (4) ⇒ (2):
  Sei E ein Hilbertraum. Dann konvergiert für jedes $x \in E$ die Reihe $\sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i$. Denn sei $S_n = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$. Dann gilt:
$$\|S_n - S_m\|^2 = \left\| \sum_{i=m+1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i \right\|^2 = \sum_{i=m+1}^{n} \|\langle x, e_i \rangle e_i\|^2 = \sum_{i=m+1}^{n} |\langle x, e_i \rangle| \xrightarrow{m,n \to \infty} 0$$
  wegen der Besselschen Ungleichung. Also ist S_n eine Cauchy-Folge und wegen der Vollständigkeit von E folgt die Konvergenz der Reihe
$$\sum_{i \in \mathbb{I}} \langle x, e_i \rangle e_i =: S_x \in \overline{\operatorname{span}\{e_i \mid i \in I\}}.$$
  Damit ergibt sich $\langle S_x, e_i \rangle = \sum_{j \in I} \langle x, e_j \rangle \langle e_j, e_i \rangle = \langle x_i, e_i \rangle$. Also ist $\langle x - S_x, e_j \rangle = 0$ für alle $j \in I$ und es folgt $x - S_x = 0$, da $\{e_i \mid i \in I\}$ ein maximales Orthonormalsystem ist.

- (3) ⇒ (4):
  Für alle $i \in I$ sei $y \perp e_i$. Dann folgt $\|y\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle y, e_i \rangle|^2 = 0$ und somit $y = 0$. Damit ist das Orthonormalsystem $\{e_i \mid i \in I\}$ maximal.

□

Definition 2.1.2. *Eine Teilmenge T eines metrischen Raums M heißt* separabel, *falls eine endliche oder abzählbar unendliche Teilmenge A von M existiert, die dicht in T ist.*

Satz 2.1.8. *H ist genau dann ein separabler Hilbertraum, wenn H ein maximales, abzählbares Orthonormalsystem besitzt.*

Beweisstrategie. Um zu zeigen, dass jeder separabler Hilbertraum ein maximales, abzählbares Orthonormalsystem besitzt, konstruiert man dieses mit dem Gram-Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahrens. Die Rückrichtung folgt aus 2.1.7. □

Beispiel 14. *Sei $H_1 = L^2([0, 2\pi], \mathbb{R})$. Dann ist $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, g_1, h_1, g_2, h_2, \dots \right\}$ mit $g_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx)$ und $h_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx)$ für $n \in \mathbb{N}$ ein maximales, abzählbares Orthonormalsystem. Außerdem gilt für alle $f \in H_1$*
$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t &+ \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt)\,\mathrm{d}t \right) \cos(nx) \\ &+ \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt)\,\mathrm{d}t \right) \sin(nx), \end{aligned}$$
wobei die Reihen bezüglich der L^2-Norm konvergieren. Für einen Beweis siehe [1].

Sei $H_2 = L^2([0,2\pi],\mathbb{C})$. Dann ist $\left\{f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\mathrm{i}nx} \,|\, n \in \mathbb{N}\right\}$ ein maximales, abzählbares Orthonormalsystem und es gilt für alle $f \in H_2$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\int_0^{2\pi} f(t)e^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t\right)e^{\mathrm{i}nx},$$

wobei die Reihe ebenfalls bezüglich der L^2-Norm konvergiert.

Bemerkung 12. *Jede lineare Abbildung $\ell\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lässt sich durch eine Matrix $L = (L_1|L_2|\dots|L_n)$ darstellen und es gilt*

$$\ell(x) = (L_1|L_2|\dots|L_n)\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = \left\langle\begin{pmatrix}L_1\\ \vdots\\ L_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\right\rangle$$

mit $L_i \in \mathbb{R}$ für $i \in \{1,\dots,n\}$.

Theorem 2.1.9 (Rieszscher Darstellungssatz)**.** *Sei H ein Hilbertraum. Dann existiert zu jedem $\ell \in H'$ genau ein $z \in H$ so, dass folgende Eigenschaften erfüllt sind:*

1. *$\ell(x) = \langle x, z\rangle$ für alle $x \in H$.*
2. $\underbrace{\|\ell\|}_{\text{Operatornorm}} = \underbrace{\|z\|}_{\text{Norm in } H}.$

Beweis. Sei zunächst $N = H$, dann ist $\ell = 0$ und für alle $x \in H$ gilt $\ell(x) = 0 = \langle x, 0\rangle$. Sei nun $N \neq H$. Wir wählen nun, wie in Korollar 2.1.4, ein $z_0 \in N^\perp$ mit $z_0 \neq 0$. Dann gilt $a = \ell(z_0) \neq 0$ und $x - \frac{\ell(x)}{a}z_0 \in N$ für alle $x \in H$, denn

$$\ell\left(x - \frac{\ell(x)}{a}z_0\right) = \ell(x) - \frac{\ell(x)}{a}\ell(z_0) = 0.$$

Wegen $z_0 \in N^\perp$ folgt für alle $x \in H$:

$$0 = \left\langle x - \frac{\ell(x)}{a}z_0, z_0\right\rangle = \langle x, z_0\rangle - \ell(x)\frac{\|z_0\|^2}{a}.$$

Daraus folgt für $z = \frac{\bar{a}}{\|z_0\|^2}z_0$, dass $\langle x, z\rangle = \frac{a}{\|z_0\|^2}\langle x, z_0\rangle = \ell(x)$. Ferner ist z eindeutig bestimmt, denn aus $\tilde{z} \in H$ mit $\langle x, \tilde{z}\rangle = \ell(x)$ für alle $x \in H$, folgt $0 = \langle x, z\rangle - \langle x, \tilde{z}\rangle = \langle x, z - \tilde{z}\rangle$, woraus $z = \tilde{z}$ folgt. Außerdem gilt

$$\|\ell\| = \sup_{\|x\|=1}|\ell(x)| = \sup_{\|x\|=1}|\langle x, z\rangle| \leq \sup_{\|x\|=1}\|x\|\|z\| = \|z\|$$

und

$$\|z\|^2 = \langle z, z\rangle = \ell(z) \leq \|\ell\|\|z\|,$$

woraus $\|z\| = \|\ell\|$ folgt. □

Korollar 2.1.10. *Sei H ein Hilbertraum über $\mathbb{K}$ und $R_H\colon H \to H'$ sei definiert durch*

$$R_H\colon y \mapsto R_H(y)(x) = \langle x, y\rangle$$

für alle $x, y \in H$. Dann ist J für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ isometrischer Isomorphismus und für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ein isometrischer, konjugiert linearer Isomorphismus, d.h., R_H ist eine Isometrie sowie konjugiert linear. Also gilt insbesondere für alle $y_1, y_2 \in H$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ die Identität

$$R_H(y_1 + \alpha y_2)(x) = R_H(y_1)(x) + \overline{\alpha} R_H(y_2)(x)$$

und R_H^{-1} ist stetig.

Beweis. Die Behauptung folgt aus dem Rieszschen Darstellungssatz und den Eigenschaften des Skalarprodukts. □

Satz 2.1.11. *Sei H ein Hilbertraum, $y \in H$ und $\ell \in H'$. Dann gilt*

$$\forall_{x\in H}\, \ell(x) = \langle x, y\rangle$$

genau dann, wenn

$$\frac{1}{2}\langle y, y\rangle - Re\,(\ell(y)) = \min_{x\in H}\left(\frac{1}{2}\langle x, x\rangle - Re\,(\ell(x))\right).$$

Beweis. Wir führen den Beweis nur für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Der Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ verläuft analog. Sei zunächst $\ell(x) = \langle x, y\rangle$ für alle $x \in H$. Dann existiert für jedes $x \in H$ ein $z \in H$ mit $x = y + z$ und es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\langle x, x\rangle - \ell(x) &= \frac{1}{2}\langle y+z, y+z\rangle - \ell(y+z) \\
&= \frac{1}{2}\langle y, y\rangle + \langle z, y\rangle + \frac{1}{2}\langle z, z\rangle - \ell(y) - \ell(z) \\
&= \frac{1}{2}\langle y, y\rangle - \ell(y) + 0 + \frac{1}{2}\langle z, z\rangle \\
&\geq \frac{1}{2}\langle y, y\rangle - \ell(y).
\end{aligned}$$

Also ist y das gewünschte Minimum. Sei nun $\frac{1}{2}\langle y, y\rangle - \ell(y) = \min_{x\in H}\left(\frac{1}{2}\langle x, x\rangle - \ell(x)\right)$. Dann gilt für alle $x \in H$ und alle $h \geq 0$ die Ungleichung

$$\begin{aligned}
0 &\leq \frac{1}{2}\langle y \pm hx, y \pm hx\rangle - \ell(y \pm hx) - (\frac{1}{2}\langle y, y\rangle - \ell(y)) \\
&= \frac{1}{2}\langle y, y\rangle \pm h\langle x, y\rangle + \frac{1}{2}h^2\langle x, x\rangle - \ell(y) \mp h\ell(x) - \frac{1}{2}\langle y, y\rangle + \ell(y) \\
&= \pm h\langle x, y\rangle \mp h\ell(x) + \frac{1}{2}h^2\langle x, x\rangle.
\end{aligned}$$

Division durch h und anschließender Grenzübergang $h \to 0$ liefert $0 \leq \pm(\langle x, y\rangle - \ell(x))$ und so ist $\langle x, y\rangle = \ell(x)$. □

Theorem 2.1.12 (Lax-Milgram). *Sei H ein Hilbertraum über $\mathbb{K}$ und $a\colon H \times H \to \mathbb{K}$ sei sesquilinear. Außerdem gebe es Konstanten c_0, C_0 mit $0 < c_0 < C_0 < \infty$, so dass für alle $x, y \in H$ die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:*

(i) Stetigkeit von a: $|a(x,y)| \leq C_0 \|x\| \cdot \|y\|$.

(ii) Koerzivität von a: $Re\,(a(x,x)) \geq c_0 \|x\|^2$.

Dann existiert zu jedem $\ell \in H'$ genau ein $z \in H$ mit

1. *Für alle $y \in H$ gilt $a(y,z) = \ell(y)$.*
2. *$\|z\| \leq \frac{1}{c_0}\|\ell\|$.*

Außerdem existiert genau eine Abbildung $A\colon H \to H$, mit $a(y,x) = \langle y, Ax\rangle$ für alle $x, y \in H$. Des Weiteren ist A linear und stetig sowie invertierbar mit $\|A\| \leq C_0$ und $\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{c_0}$.

Beweis. Für jedes $x \in H$ ist nach (i) die Abbildung $y \mapsto a(y,x) \in H'$ mit $\|a(\cdot,x)\| \leq C_0\|x\|$. Nach dem Rieszschen Darstellungssatz gibt es daher genau ein Element $A(x) \in H$, so dass $a(y,x) = \langle y, A(x)\rangle$ für alle $y \in H$ gilt und es ist

$$\|A(x)\|_H = \|a(\cdot,x)\| \leq C_0\|x\|_H.$$

Da a und das Skalarprodukt konjugiert linear im zweiten Argument sind, folgt die Linearität von A und es gilt $\|A\| \leq C_0$. Außerdem erhalten wir

$$c_0\|x\|^2 \leq \mathrm{Re}(a(x,x)) = \mathrm{Re}(\langle x, Ax\rangle) \leq \|x\|\|A(x)\|.$$

Daraus folgt

$$c_0\|x\| \leq \|A(x)\| \qquad (*)$$

für alle $x \in H$, so dass wir $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$ und somit die Injektivität von A erhalten. Außerdem folgt, dass der Bildraum von A abgeschlossen ist. Denn für $x_n, x \in H$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} A(x_n) = y \Rightarrow \|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{c_0}\|A(x_n) - A(x_m)\| \xrightarrow{m,n\to\infty} 0.$$

Damit ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in H und es existiert wegen Vollständigkeit ein $x \in H$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Wegen Stetigkeit von A erhalten wir so $\lim_{n\to\infty} A(x_n) = A(x) \in \mathfrak{R}(A)$. Wir möchten nun noch zeigen, dass $\mathfrak{R}(A) = H$ ist. Wir nehmen dazu an, dass $\mathfrak{R}(A) \neq H$ gilt. Wegen der Abgeschlossenheit von $\mathfrak{R}(A)$ existiert nach dem Projektionssatz ein $x_0 \in H \setminus \mathfrak{R}(A)$ mit $\langle y, x_0\rangle = 0$ für alle $y \in \mathfrak{R}(A)$. Es folgt

$$0 = \mathrm{Re}\langle A(x_0), x_0\rangle = \mathrm{Re}\langle x_0, A(x_0)\rangle = \mathrm{Re}(a(x_0,x_0)) \geq c_0\|x_0\|^2 \geq 0$$

Es folgt $x_0 = 0$ und so erhalten wir einen Widerspruch. Damit ist A surjektiv und so insgesamt bijektiv. Wegen $(*)$ erhalten wir außerdem $\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{c_0}$.
Sei R_H die Isometrie aus Korollar 2.1.10. Zu gegebenem $\ell \in H'$ ist dann $z = A^{-1}R_H^{-1}\ell$ die eindeutige Lösung von $a(y,z) = \ell(y)$ wobei $\|z\| \leq \frac{1}{c_0}\|\ell\|$ gilt. $\square$

2.2. Anwendungen bei elliptischen Randwertproblemen und Einführung von Sobolevräumen

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Normalgebiet und $f \in C^0(\overline{\Omega})$. Wir definieren das *Energie-Funktional*

$$E(w) := \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla w|^2 - fw \,\mathrm{d}x$$

sowie die Menge $A_g = C^1_g(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ mit $g \in C^0(\partial\Omega)$ und $C^1_g(\overline{\Omega}) = \{w \in C^1(\overline{\Omega}) \mid w|_{\partial\Omega} = g\}$.
Wir suchen ein Minimum von E auf A_g. Dieses Minimierungsproblem hat viele physikalische Interpretationen. Beispiele sind eingespannte Membrane, elektrische Potentiale oder stationäre Temperaturverteilungen.

Satz 2.2.1. *Sei $u \in A_g$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) $E(u) = \min_{w \in A_g} E(w)$.

(2) u erfüllt für alle $\varphi \in C^\infty_c(\Omega)$ die Identität

$$\int_\Omega \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle - f\varphi \,\mathrm{d}x = 0.$$

(3) u löst die Poissongleichung $-\triangle u = f$ in Ω mit der (inhomogenen) Dirichlet-Randbedingung $u = g$ auf $\partial\Omega$.

Beweis. Sei $u \in A_g$ mit $E(u) = \min_{w \in A_g} E(w)$. Dann gilt für alle $\varphi \in C^\infty_c(\Omega)$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(E(u + h\varphi) - E(u)) = 0.$$

Setzen wir nun den expliziten Ausdruck von E ein, erhalten wir für alle $\varphi \in C^\infty_c(\Omega)$:

$$\int_\Omega \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle - f\varphi \,\mathrm{d}x = 0$$

und somit (2).
Aufgrund der Greenschen Formel

$$\forall_{u,w \in C^2(\overline{\Omega})} : \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla w \rangle \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega (\triangle u) \cdot w \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} w \,\mathrm{d}o,$$

wobei $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ die Ableitung von u in Richtung des äußeren Einheitsnormalenvektors und do das Oberflächenmaß ist, ist (2) äquivalent zu

$$\int_\Omega (-\triangle u - f)\varphi \,\mathrm{d}x = 0$$

für alle $\varphi \in C^\infty_c(\Omega)$ und mit dem Fundamentallemma der Variationsrechnung

$$\left(f \in C^0(\Omega) \wedge \forall \varphi \in C^\infty_c(\Omega) : \int_\Omega f\varphi \,\mathrm{d}x = 0\right) \Leftrightarrow f = 0$$

folgt die Äquivalenz von (2) und (3).
Sei nun (3) erfüllt und $w \in A_g$ beliebig. Dann gilt nach der Greenschen Formel und wegen $u|_{\partial\Omega} = w|_{\partial\Omega}$ die Identität

$$\int_\Omega \langle \nabla u, \nabla(u - w) \rangle - f(u - w) \,\mathrm{d}x = 0.$$

Dies impliziert

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u|^2 - fu \,\mathrm{d}x &= \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla w\rangle - fw \,\mathrm{d}x \\ &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2 \,\mathrm{d}x - \int_\Omega fw \,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Daraus folgt nun

$$\int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - fu \,\mathrm{d}x \leq \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla w|^2 - fw \,\mathrm{d}x$$

und, da $w \in A_g$ beliebig war, auch (1). □

Bemerkung 13. *Notwendige Bedingung für die Existenz einer Lösung u von (3) in Satz 2.2.1 ist die Existenz einer Funktion $u_g \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ mit $u_g|_{\partial\Omega} = g$ (das ist unter geeigneten Voraussetzungen an die Regularität von g und $\partial\Omega$ möglich). Existiert eine solche Funktion u_g, dann ist (3) äquivalent zu*

$$\begin{cases} -\triangle \tilde{u} = \tilde{f}, & \text{in } \Omega \\ \tilde{u} = 0, & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

mit $\tilde{u} = u - u_g$ und $\tilde{f} = f + \triangle u_g$. Daher genügt es, dass wir im folgenden homogene Dirichlet-Randbedingungen, also $g = 0$ betrachten.

Nun zur Frage der Existenz eines Minimums:

Satz 2.2.2 (Poincaré-Ungleichung)**.** *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, das zwischen zwei Parallelen, die zueinander den Abstand d haben, liegt. Dann gilt für alle $u \in C_0^1(\overline{\Omega})$:*

$$\|u\|_{L^2} \leq \frac{d}{\sqrt{2}}\|\nabla u\|_{L^2}$$

mit $\|\nabla u\|_{L^2} = (\sum_{i=1}^n \|\partial_{x_i} u\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}$.

Beweis. Durch eine Bewegung des $\mathbb{R}^n$, können wir $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \times (0, d)$ erreichen. Hierbei ändern sich die Werte von u und ∇u nicht.
Wir betrachten zunächst $u \in C_c^1(\Omega)$ und setzen u außerhalb von Ω durch 0 fort. Sei $\tilde{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$. Dann gilt $u(\tilde{x}) = 0$ und daher für alle $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$ die Ungleichung

$$\begin{aligned}|u(x)|^2 &= |u(x) - u(\tilde{x})|^2 \\ &= \left|\int_0^{x_n} 1 \cdot \partial_{x_n} u(x_1, \ldots, x_{n-1}, s)\,\mathrm{d}x\right|^2 \\ &\leq \left(\int_0^{x_n} 1^2 \,\mathrm{d}s\right) \cdot \left(\int_0^{x_n} (\partial_{x_n} u(x_1, \ldots, x_{n-1}, s))^2 \,\mathrm{d}s\right) \\ &\leq x_n \int_0^d |\nabla u(x_1, \ldots, x_{n-1}, s)|^2 \,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Daher folgt

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^2}^2 &= \int_\Omega |u(x)|^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_0^d u(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n)^2 \,\mathrm{d}x_n \right) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_{n-1} \\
&\leq \frac{1}{2} d^2 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_0^d |\nabla u(x_1,\ldots,x_{n-1},s)|^2 \,\mathrm{d}s \right) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_{n-1} \\
&= \frac{1}{2} d^2 \int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \|\nabla u\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

und da $C_c^1(\Omega)$ bezüglich $\| \, . \, \|_{L^2} + \| \, \nabla \, . \, \|_{L^2}$ dicht in $C_0^1(\overline{\Omega})$ ist, die Behauptung. □

Lemma 2.2.3. *E ist auf A_0 nach unten beschränkt.*

Beweis. Für alle $w \in A_0$ gilt zunächst

$$\begin{aligned}
E(w) &= \frac{1}{2}\|\nabla w\|_{L^2}^2 - \langle f, w \rangle_{L^2} \\
&\geq \frac{1}{2}\|\nabla w\|_{L^2}^2 - \|f\|_{L^2}\|w\|_{L^2} \\
&\geq \frac{1}{2}\|\nabla w\|_{L^2}^2 - \varepsilon\|w\|_{L^2}^2 - \frac{1}{4\varepsilon}\|f\|_{L^2}^2 \\
&\geq \tilde{C}\|w\|_{L^2}^2 - \varepsilon\|w\|_{L^2}^2 - \frac{1}{4\varepsilon}\|f\|_{L^2}^2,
\end{aligned}$$

wobei im vorletzten Schritt $ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} b^2$ und im letzten Schritt die Poincaré-Ungleichung für ein $\tilde{C} > 0$ verwendet wurden.Wählen wir nun ε in Abhängigkeit von $\tilde{C}$ hinreichend klein, ergibt sich

$$E(w) \geq -\frac{1}{4\varepsilon}\|f\|_{L^2}^2$$

und so die Behauptung. □

Bemerkung 14. *Da E auf A_0 nach unten beschränkt ist, existiert eine Minimalfolge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A_0$. Wegen der Konvexität von A_0 lässt sich analog zum Beweis von 2.1.1 mit Hilfe der Parallelogrammgleichung zeigen, dass für i $\in \{1,\ldots,n\}$ die Folgen $(\partial_{x_i} u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen bezüglich der L^2-Norm sind. Nun ist wegen der Poincaré-Ungleichung auch $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge bezüglich der L^2-Norm, bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{H^1}$ mit $\|f\|_{H^1} = \|f\|_{L^2} + \|\nabla f\|_{L^2}$ sowie bezüglich der in diesem Fall zu $\|\cdot\|_{H^1}$ äquivalenten Norm $\|\cdot\|_{H_0^1}$ mit $\|f\|_{H_0^1} = \|\nabla f\|_{L^2}$.*
A_0 ist allerdings bezüglich dieser Normen nicht vollständig. Wegen der Vollständigkeit von L^2 existiert aber zumindest $u = \lim_{n\to\infty} u_n \in L^2$ bezüglich der L^2-Norm. Außerdem existieren "$\partial_{x_i} u$" $:= \lim_{n\to\infty} \partial_{x_i} u_n \in L^2$ bezüglich der L^2-Norm. Allerdings muss u im Allgemeinen keine partiellen Ableitungen besitzen.
Zwischen u und den "$\partial_{x_i} u$" besteht folgende Beziehung:

$$\forall_{\varphi \in C_c^\infty}(\Omega) : \int_\Omega {}''\partial_{x_i} u{}'' \varphi \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega u \partial_{x_i} \varphi \,\mathrm{d}x.$$

Beweis. Wir können die Identität wie folgt nachrechnen:

$$\int_\Omega \text{"}\partial_{x_i} u\text{"} \varphi \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} \partial_{x_i} u_n \varphi \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \partial_{x_i} u_n \varphi \,\mathrm{d}x = -\lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n \partial_{x_i} \varphi \mathrm{d}x$$
$$= -\int_\Omega \lim_{n\to\infty} u_n \partial_{x_i} \varphi \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega u \partial_{x_i} \varphi \,\mathrm{d}x.$$

□

Definition 2.2.1 (Sobolev-Räume)**.**

a) *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $m \in \mathbb{N}$ und $1 \leq p \leq \infty$. Dann heißt der Vektorraum*

$$W^{m,p}(\Omega) \quad = \quad \Big\{ f \in L^p(\Omega) \,|\, \forall_{\textit{Multiindizes } s, |s| \leq m} \exists_{f^{(s)} \in L^p(\Omega)} : f^{(0)} = f \;\wedge$$
$$\forall_{\varphi \in C_c^\infty(\Omega)} : \int_\Omega (\partial_x^s \varphi) f \,\mathrm{d}x = (-1)^{|s|} \int_\Omega \varphi f^{(s)} \,\mathrm{d}x \Big\}$$

Sobolev-Raum der Ordnung m mit Exponent p. *Für $p = 2$ schreibt man auch $H^m(\Omega)$ statt $W^{m,2}(\Omega)$.*
Wir versehen $W^{m,p}(\Omega)$ mit der Norm $\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \sum_{|s| \leq m} \|f^{(s)}\|_{L^p(\Omega)}$. Für $p = 2$ schreibt man auch $\|\cdot\|_{H^m(\Omega)}$ statt $\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}$.

b) *Die Funktionen $f^{(s)}$ für $|s| \geq 1$ heißen* schwache Ableitungen *von f und werden mit $\partial_x^s f := f^{(s)}$ bezeichnet.*

c) *Der Raum $W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}}$ für $1 \leq p < \infty$ heißt* Sobolevraum mit (verallgemeinerten) Nullrandwerten der Ordnung m mit Exponent p. *Für $p = 2$ schreibt man auch $H_0^m(\Omega)$ statt $W_0^{m,p}(\Omega)$.*

Satz 2.2.4.

a) *Alle schwachen Ableitungen sind eindeutig bestimmt.*

b) *Besitzt $f \in W^{m,p}(\Omega)$ eine partielle Ableitung $\partial_x^s f$ mit $|s| \leq m$, so stimmt $\partial_x^s f$ (modulo einer Nullmenge) mit der schwachen Ableitung $f^{(s)}$ überein. Dies rechtfertigt die Notation $\partial_x^s f = f^{(s)}$.*

Beweis. Der Beweis folgt leicht aus dem nachfolgenden Lemma. □

Lemma 2.2.5 (Verallgemeinertes Fundamentallemma der Variationsrechnung)**.**
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in L^1(\Omega)$, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

a) *Für alle $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ gilt $\int_\Omega f \varphi \,\mathrm{d}\lambda = 0$.*

b) *Es gilt $f = 0$ fast überall.*

Beweis siehe [1].

Satz 2.2.6.

a) $(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)})$ *sind Banachräume,* $(H^m(\Omega), \|\cdot\|_{H^m(\Omega)})$ *sind Hilberträume.*

b) Für $1 \leq p < \infty$ *sind die Räume* $W^{m,p}(\Omega)$ *bzw.* $H^m(\Omega)$ *separabel.*

c) $(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)})$ *bzw.* $(H^m(\Omega), \|\cdot\|_{H^m(\Omega)})$ *sind modulo isometrischen Isomorphismus die Vervollständigungen von* $\{f \in C^\infty(\Omega) \mid \|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} < \infty\}$ *bzw.* $\{f \in C^\infty(\Omega) \mid \|f\|_{H^m(\Omega)} < \infty\}$.

d) Für $1 \leq p < \infty$ *und für alle* $f \in W^{m,p}(\Omega)$ *existieren* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq W^{m,p}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ *mit*
$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_{W^{m,p}(\Omega)} = 0.$$

Beweis siehe [1].

Satz 2.2.7 (Verallgemeinerte Poincaré-Ungleichung). *Sei* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *ein Gebiet, das zwischen zwei parallelen Hyperebenen mit Abstand* d *liegt. Dann gilt*

$$\forall_{u\in H_0^1(\Omega)} : \|u\|_{L^2} \leq \frac{d}{\sqrt{2}} \|\nabla u\|_{L^2}$$

mit $\|\nabla u\|_{L^2} = (\sum_{i=1}^m \|\partial x_i u\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}$ *(schwacher Gradient).*

Beweis. Da beide Seiten der Ungleichung bezüglich der H^1-Norm stetig von u abhängen, folgt die Behauptung aus 2.2.2. □

Korollar 2.2.8. *Die Normen* $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ *und* $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ *sind auf* $H_0^1(\Omega)$ *äquivalent, falls* Ω *die Voraussetzungen des vorherigen Satzes erfüllt. Dabei ist* $\|f\|_{H_0^1(\Omega)} := \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}$.

Satz 2.2.9. *Sei* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *ein beschränktes Normalgebiet,* $f \in L^2(\Omega)$ *und*

$$E(w) = \int_\Omega \frac{1}{2} |\nabla w|^2 - f w \,\mathrm{d}\lambda.$$

Dann besitzt E *auf* $H_0^1(\Omega)$ *eine eindeutige Minimalstelle* u *und* u *ist eindeutige schwache Lösung des Dirichlet-Problems für die Poisson-Gleichung* $-\triangle u = f$*, es gilt also*
$$\forall_{\varphi\in H_0^1(\Omega)} : \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi - f\varphi \,\mathrm{d}\lambda = 0.$$

1. Beweismöglichkeit. Aufgrund von Korollar 2.2.8 ist E als Funktion von $H_0^1(\Omega)$ nach $\mathbb{R}$ stetig (egal ob $H_0^1(\Omega)$ mit $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ oder $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ ausgerüstet ist). Dies impliziert, da E nach Lemma 2.2.3 auf $A_0 \supseteq C_c^\infty(\Omega)$ nach unten beschränkt ist, dass E auch auf $H_0^1(\Omega)$ nach unten beschränkt ist.
Daher existiert eine Minimalfolge $(u_m)_{m\in\mathbb{N}} \subseteq H_0^1(\Omega)$. Wegen der Konvexität von $H_0^1(\Omega)$ kann man wie im Beweis von Satz 2.1.1 mit Hilfe der Parallelogrammgleichung zeigen, dass $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $H_0^1(\Omega)$ bezüglich der $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$-Norm, und daher aufgrund der Normäquivalenz auch bezüglich der $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$-Norm.
Da $H^1(\Omega)$ bezüglich beider Normen vollständig ist, existiert $u = \lim_{m\to\infty} u_m$ bezüglich beider Normen. Wegen Stetigkeit von E ist u Minimalstelle. Die Eindeutigkeit der

Minimalstelle ergibt sich wiederum mit Hilfe der Parallelogrammgleichung wie im Beweis von Satz 2.1.1.
Die Charakterisierung der Minimalstelle u als eindeutige, schwache Lösung des Dirichlet-Problems der Poisson-Gleichung erhält man mit analoger Argumentation wie im Beweis von Satz 2.2.1. □

2. Beweismöglichkeit. Wir können diese Aussage auch auf einem alternativen Weg beweisen. Wir betrachten

$$w \mapsto \int_\Omega |\nabla w|^2 \, \mathrm{d}\lambda,$$

dass zu $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ gehörende Skalarprodukt. Die Abbildung

$$w \mapsto \int_\Omega f w \, \mathrm{d}\lambda$$

ist aufgrund der Äquivalenz der H_0^1-Norm und der H^1-Norm auf $H_0^1(\Omega)$ als Abbildung vom Hilbertraum $\left(H_0^1(\Omega), \|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}\right)$ nach $\mathbb{R}$ linear und stetig. Nach Satz 2.1.11 und dem Rieszschen Darstellungssatz folgt daher die Behauptung. □

Wir möchten nun unsere Lösung auf elliptische Randwertprobleme verallgemeinern. Sei dazu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Normalgebiet. Gesucht sind Funktionen $u \in C^2(\Omega)$, welche die elliptische Differentialgleichung

$$-\sum_{i=1}^n \partial_{x_i} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \, \partial_{x_j} u + h_i \right) + bu + f = 0 \tag{I}$$

in Ω lösen. Dabei seien $a_{ij}, h_i \in C^1(\Omega)$ für $i, j = 1, \ldots, n$ und $f, b \in C^0(\Omega)$ sowie die Matrix $(a_{ij}(x))_{i,j}$ gleichmäßig elliptisch in x, d.h. es existiert ein $c_0 > 0$ so, dass für alle $x \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}^n$ die Ungleichung

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq c_0 |\xi|^2$$

erfüllt ist. Dabei beschreibt für jedes $c > 0$ die Menge der Punkte $\xi \in \mathbb{R}^n$, für die $\sum_{i,j} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j = c$ gilt, eine Ellipse. Die Matrix $(a_{ij}(x))_{i,j}$ kann unsymmetrisch sein. Solche elliptischen Differentialgleichungen sind ohne zusätzliche Bedingungen nicht eindeutig lösbar. Meistens erhält man eindeutige Lösbarkeit durch Einführung von Randbedingungen. Die beiden häufigsten Randbedingungen, die in der mathematischen Physik vorkommen, sind

1. Dirichlet-Randbedingungen:

$$\begin{cases} u \text{ löst } (I) \text{ auf } \Omega, \\ u = g \text{ auf } \partial\Omega, \ g \in C^0(\partial\Omega). \end{cases}$$

2. Neumann-Randbedingungen:

$$\begin{cases} u \text{ löst } (I) \text{ auf } \Omega, \\ -\sum_{i=1}^n \nu_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \partial_{x_i} u + h_i \right) = g \text{ auf } \partial\Omega, \ g \in C^0(\partial\Omega), \end{cases}$$

wobei $\nu = (\nu_i)_{i=1,\ldots,n}$ die äußeren Normaleneinheitsvektoren an $\partial\Omega$ sind.

Wie bei der Poissongleichung, führen wir auch hier schwache Lösungsbegriffe ein. Sei nun $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ und erfülle gleichmäßige Elliptizitätsbedingungen fast überall auf Ω, $b \in L^\infty$ und $h_i, f \in L^2(\Omega)$. Aus denselben Gründen wie bei der Poissongleichung genügt es, wenn wir den Fall $g = 0$ untersuchen.

- $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ heißt *schwache Lösung des Dirichlet-Problems*, falls $u \in H_0^1(\Omega)$ und

  $$\forall_{\varphi \in H_0^1(\Omega)} : \int_\Omega \left(\sum_i \partial_{x_i}\varphi \left(\sum_j a_{ij}\partial x_j u + h_i \right) + \varphi(bu + f) \right) \mathrm{d}\lambda = 0$$

  gilt.
- $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ heißt *schwache Lösung des Neumann-Problems*, falls $u \in H^1(\Omega)$ und

  $$\forall_{\varphi \in H^1(\Omega)} : \int_\Omega \left(\sum_i \partial_{x_i}\varphi \left(\sum_j a_{ij}\partial x_j u + h_i \right) + \varphi(bu + f) \right) \mathrm{d}\lambda = 0$$

  gilt.

Zusätzlich setzen wir $b \geq 0$ für das Dirichlet-Problem und $b \geq b_0 > 0$ für das Neumann-Problem voraus.

Satz 2.2.10.

- *Unter den gesamten obigen Voraussetzungen existiert genau eine schwache Lösung des Dirichlet-Problems.*
- *Unter den gesamten obigen Voraussetzungen existiert genau eine schwache Lösung des Neumann-Problems.*

Beweisstrategie: Es ist zu zeigen, dass unter den obigen Voraussetzungen der Satz von Lax-Milgram angewendet werden kann. □

Bemerkung 15. *Unter zusätzlichen Regularitätsannahmen an die Daten a_{ij}, h_i, b, f und $\partial\Omega$ kann man zeigen, dass die schwache Lösung so regulär ist, dass sie auch eine klassische Lösung ist. Wählt man beispielsweise $a_{ij} \in C^{m,1}(\Omega)$, $h_i \in H^{m+1}$, $f \in H^m$ und ist $\partial\Omega$ lokal als Graph von C^{m+1}-Funktionen darstellbar, erhält man $u \in H^{m+2}(\Omega)$ und damit für hinreichend großes m (in Abhängigkeit von n) auch $u \in C^2(\Omega)$.*
Für nähere Details sei auf die elliptische Regularitätstheorie (L^2-Theorie, L^p-Theorie, $C^{0,\alpha} -$ Theorie) verwiesen. In einigen Fällen werden dabei die Sobolevschen Einbettungssätze verwendet.

Wir werden nun noch kurz auf die Möglichkeiten der endlich-dimensionalen Approximation von Lösungen der ellptischen Randwertprobleme eingehen.

Sei $u \in H^1(\Omega)$ die schwache Lösung des Neumann-Problems und $u \in H_0^1(\Omega)$ die schwache Lösung des Dirichlet-Problems. Wir wählen N-dimensionale Unterräume X_N von $H^1(\Omega)$ bzw. $H_0^1(\Omega)$. Dann existiert genau ein $u_N \in X_N$, so dass

$$\forall_{\varphi \in X_N} : \int_\Omega \sum_i \partial_x\varphi \left(\sum_j a_{ij}\partial_{x_j} u_N + h_i \right) + \varphi(bu_N + f)\, \mathrm{d}\lambda = 0$$

ist, und bezüglich einer Basis $\{\varphi_k^{(N)}, k = 1, \ldots, n\}$ hat u_N die Darstellung $u_N = \sum_{k=1}^N u_{N,k}\varphi_k^{(N)}$, wobei die Koeffizienten $u_{N,k} \in \mathbb{R}$ als eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\sum_{\ell=1}^{N} a_{k\ell}^{(N)} u_{N,\ell} + c_k^{(N)} = 0, \quad k = 1, \ldots, N$$

mit

$$a_{k\ell}^{(N)} = \int_\Omega \left(\sum_{i,j} a_{ij} \partial_{x_i} \varphi_k^{(N)} \partial x_j \varphi_\ell^{(N)} + b \varphi_k^{(N)} \varphi_\ell^{(N)} \right) \mathrm{d}\lambda$$

und

$$c_k^{(N)} = \int_\Omega \sum_i \partial_{x_i} \varphi_k^{(N)} h_i + \varphi_k^{(N)} f \,\mathrm{d}\lambda$$

gegeben sind. Der Nachweis der Struktur des linearen Gleichungssystems geschieht durch direktes Nachrechnen. Der Nachweis der eindeutigen Existenz von u_N kann entweder mit Lax-Milgram im Hilbertraum X_N geführt werden (X_N ist als endlich-dimensionaler Raum vollständig), oder indem man zeigt, dass die Voraussetzungen an a_{ij}, insbesondere die gleichmäßigen Elliptizitätsbedingungen die Invertierbarkeit der Matrix des Gleichungssystems implizieren. Die obige Approximation nennt man auch *Ritz-Galerkin-Approximation.*

Die zentrale Fehlerabschätzung für diese Approximation ist:

Lemma 2.2.11 (Céa)**.** *Für eine Konstante* $C > 0$ *(die von den Konstanten im Theorem von Lax-Milgram abhängt) gilt:*

$$\|u - u_N\|_{H^1} \leq C \cdot \inf_{v \in X_N} \|u - v\|_{H^1}.$$

Wegen der Separabilität von H^1 *können die* X_N *so gewählt werden, dass*

$$inf_{v \in X_N} \|u - v\|_{H^1} \xrightarrow{N \to \infty} 0$$

gilt.

Beweis. Sei

$$a(u, v) = \sum_{i,j} \int_\Omega \partial_{x_i} u \, a_{ij} \partial_{x_j} v \,\mathrm{d}\lambda + \int_\Omega ubv \,\mathrm{d}\lambda$$

und

$$F(v) = -\int_\Omega \left(\sum_i \partial_{x_i} v \, h_i + vf \right) \mathrm{d}\lambda.$$

Dann gilt für alle $v \in H^1(\Omega)$ bzw. $H_0^1(\Omega)$ die Identität

$$a(v, u) = F(v)$$

und für alle $v \in X_N$ die Identität

$$a(v, u_N) = F(v).$$

Setze nun $v = w - u_N$ mit $w \in X_N$ und wir erhalten für alle $w \in X_N : a(w - u_N, u - u_N) = 0$. Dies impliziert

$$\begin{aligned} c_0 \|u - u_N\|_{H^1}^2 &\leq a(u - u_N, u - u_N) \\ &= a(u - w, u - u_N) \\ &\leq C_0 \|u - w\|_{H^1} \cdot \|u - u_N\|_{H^1}, \end{aligned}$$

wobei die Konstanten $C_0, c_0 > 0$ wie im Theorem von Lax-Milgram sind. Daraus folgt die Behauptung mit

$$\|u - u_N\|_{H^1} \leq \frac{C_0}{c_0} \cdot \inf_{v \in X_N} \|u - v\|_{H^1}.$$

□

Bezüglich der Fehlerabschätzungen für numerische Verfahren, die bei der numerischen Durchführung der Ritz-Galerkin-Approximation eingesetzt werden (Interpolation, numerische Integration, iterative Lösung des linearen Gleichungssystems) sei auf Numerik-Lehrveranstaltungen verwiesen.

2.3. Der Spektralsatz für kompakte, selbstadjungierte Operatoren

Seien H_1, H_2 Hilberträume, $T \in \mathrm{Lin}(H_1, H_2)$ und $y \in H_2$. Dann ist die Abbildung

$$x \mapsto \langle Tx, y \rangle_{H_2}$$

ein Element des Dualraums von H_1.
Nach dem Rieszschen Darstellungssatz (Theorem 2.1.9) existiert genau ein $T^*y \in H_1$ mit

$$\langle Tx, y \rangle_{H_2} = \langle x, T^*y \rangle_{H_1}.$$

Definition 2.3.1 (Hilbertraum-Adjungierte)**.** *Seien H_1, H_2 Hilberträume, $T \in Lin(H_1, H_2)$. Dann heißt die Abbildung $T^*\colon H_2 \to H_1$ mit $\langle Tx, y \rangle_{H_2} = \langle x, T^*y \rangle_{H_1}$ für alle $x \in H_1$ und $y \in H_2$* Hilbertraum-Adjungierte *von T.*

Lemma 2.3.1.

a) Es gilt $T^* \in Lin(H_2, H_1)$ mit $\|T^*\| = \|T\|$.

b) Für $\alpha \in \mathbb{K}$ ist $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$.
Ferner gilt $(T + S)^* = T^* + S^*$ und $(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$.

c) Es gilt $T^{**} = T$.

Beweis. Wir zeigen exemplarisch die Normidentität in Teil a). Alles andere ergibt sich durch direktes Nachrechnen.

$$\|T\| = \sup_{x \in B_{H_1}} \|Tx\| = \sup_{x \in B_{H_1}} \sup_{y \in B_{H_2}} |\langle Tx, y \rangle| = \sup_{\substack{x \in B_{H_1} \\ y \in B_{H_2}}} |\langle x, T^*y \rangle| = \|T^*\|.$$

□

Beispiel 15. *Wir tragen einige einfache Beispiele zusammen.*

a) Sei $H_1 = H_2 = \mathbb{R}^n$, $T = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$. Dann ist $T^* = (a_{ij})^t$ die transponierte Matrix.

b) Sei $H_1 = H_2 = \mathbb{C}^n$, $T = (a_{ij})$. Dann ist $T^* = (\overline{a_{ij}})^t$.

c) Sei $H_1 = H_2 = \ell^2_{\mathbb{R}}$, $T(x_n) = (a_n x_n)$, $n \in \mathbb{N}$ mit $\sup_n |a_n| < \infty$. Dann ist $T^*(x_n) = (a_n x_n) = T$.

d) Sei $H_1 = H_2 = \ell^2_{\mathbb{C}}$, $T(x_n) = (a_n x_n)$, $n \in \mathbb{N}$ mit $\sup_n |a_n| < \infty$. Dann ist $T^*(x_n) = (\overline{a_n} x_n)$.

Beispiel 16. *Wir betrachten ein etwas komplizierteres Beispiel. Sei $H_1 = H_2 = L^2(\Omega_1, \mathbb{C})$, Ω_1 λ-messbare Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, $K \colon \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{C}$, Ω_2 λ-messbare Teilmenge von $\mathbb{R}^m$ sowie K messbare Funktion mit*

$$\|K\| := \left(\int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} |K(\xi, \eta)|^2 \, \mathrm{d}\eta \, \mathrm{d}\xi \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Dann ist T mit

$$Tf(\eta) := \int_{\Omega_1} K(\xi, \eta) f(\xi) \, \mathrm{d}\xi, \quad \eta \in \Omega_2$$

ein Element von Lin$(L^2(\Omega_1, \mathbb{C}), L^2(\Omega_2, \mathbb{C}))$ mit $\|T\| \leq \|K\|$. Außerdem ist im Fall $n = m$, $\Omega_1 = \Omega_2$

$$T^* g(\eta) = \int_{\Omega_1} \overline{K(\eta, \xi)} g(\xi) \, \mathrm{d}\xi.$$

Die Stetigkeit ergibt sich dabei mit der Ungleichung von Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned}
\|Tf\|^2_{L^2} &= \int_{\Omega_2} \left| \int_{\Omega_1} K(\xi, \eta) f(\xi) \, \mathrm{d}\xi \right|^2 \mathrm{d}\eta \\
&\leq \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} |K(\xi, \eta)| \cdot |f(\xi)| \, \mathrm{d}\xi \right)^2 \mathrm{d}\eta \\
&\leq \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} |K(\xi, \eta)|^2 \, \mathrm{d}\xi \right) \cdot \left(\int_{\Omega} |f(\xi)|^2 \, \mathrm{d}\xi \right) \mathrm{d}\eta \\
&= \underbrace{\|K\|^2}_{<\infty} \cdot \|f\|^2_{L^2}
\end{aligned}$$

und somit ist $T \in$ Lin$(L^2(\Omega_1, \mathbb{C}), L^2(\Omega_2, \mathbb{C}))$. Den adjungierten Operator T^* erhält man durch direktes Nachrechnen (beachte $\langle f, g \rangle_{L^2} = \int \overline{f} g \, \mathrm{d}\lambda$). Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist $T^* = T$.

Definition 2.3.2 (selbstadjungiert)**.** *Der Operator T heißt genau dann* selbstadjungiert, *wenn $T = T^*$ gilt. Das ist äquivalent dazu, dass die Gleichung*

$$\langle Tx, y \rangle_H = \langle x, Ty \rangle_H$$

für alle $x, y \in H$ erfüllt ist.

Bemerkung 16. *Aus der Selbstadjungiertheit von T folgt insbesondere*

$$\langle Tx, x \rangle_H = \langle x, Tx \rangle_H = \overline{\langle Tx, x \rangle_H}$$

für alle $x \in H$. Also ist $\langle Tx, x \rangle_H \in \mathbb{R}$ für alle $x \in H$.

Definition 2.3.3 (Normaler Operator)**.** *T heißt genau dann* normal, *wenn $T^*T = TT^*$ gilt. Dies ist äquivalent dazu, dass für den Kommutator $[T^*, T] := T^*T - TT^* = 0$ gilt.*

Lemma 2.3.2. *Der Operator T ist genau dann normal, wenn*

$$\|Tx\|_H = \|T^*x\|_H$$

für alle $x \in H$ gilt.

Beweis. Sei zunächst T normal. Dann gilt

$$\langle Tx, Tx\rangle_H = \langle x, T^*Tx\rangle_H = \langle x, TT^*x\rangle_H = \langle T^*x, T^*x\rangle_H$$

und so folgt $\|Tx\|_H = \|T^*x\|_H$.
Sei nun obige Identität für alle $x \in H$ erfüllt. Aus der Polarisationsformel

$$\frac{1}{4}\left(\|a+b\|_H^2 - \|a-b\|_H^2\right) = \mathrm{Re}\left(\langle a, b\rangle_H\right)$$

folgt für alle $x, y \in H$:

$$\mathrm{Re}\left(\langle Tx, Ty\rangle_H\right) = \mathrm{Re}\left(\langle T^*x, T^*y\rangle_H\right).$$

Ersetzen von y durch iy im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ liefert dann

$$0 = \langle Tx, Ty\rangle_H - \langle T^*x, T^*y\rangle_H = \langle T^*Tx - TT^*x, y\rangle_H$$

für alle $x, y \in H$. (Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ erhält man sofort dieselbe Identität.) Daraus folgt nun $T^*T - TT^* = 0$ wie gewünscht. □

Definition 2.3.4 (Kompakter Operator)**.** *Seien E, F Banachräume. Der Operator $T \in$ Lin(E, F) heißt* kompakt*, falls $\overline{TB_E}$ (der Abschluss des Bildes der abgeschlossenen Einheitskugel in E) kompakt in F ist. Äquivalent dazu sind*

- *Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B_E$ impliziert, dass $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge in F besitzt.*
- *Für alle $\varepsilon > 0$ existiert eine endliche Teilmenge $M \subseteq F$ mit $TB_E \subseteq M + \varepsilon B_F$.*

Wir bezeichnen die Menge aller kompakten Operatoren von E nach F mit $K(E, F)$ bzw. $K(E, E) = K(E)$.

Lemma 2.3.3. *Die Menge $K(E, F)$ ist ein abgeschlossener Untervektorraum von Lin(E, F).*

Beweis. Seien $S, T \in K(E, F)$ sowie $\alpha \in \mathbb{K}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B_E$. Dann existiert wegen Kompaktheit von S zunächst eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, so dass $(Sx_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ in F konvergent ist. Wegen der Kompaktheit von T existiert eine Teilfolge $(x_{n_{k_\ell}})_{\ell\in\mathbb{N}}$, so dass $(Tx_{n_{k_\ell}})_{\ell\in\mathbb{N}}$ konvergent in F ist. Insbesondere ist auch $(Sx_{n_{k_\ell}})_{\ell\in\mathbb{N}}$ konvergent in F und so auch $((\alpha S + T)x_{n_{k_\ell}})_{\ell\in\mathbb{N}}$ konvergent in F. Damit ist $\alpha S + T \in K(E, F)$ und so erhalten wir einen Unterraum. Für die Abgeschlossenheit sei $(T_m)_{m\in\mathbb{N}} \subseteq K(E, F)$ mit $T_m \xrightarrow{m\to\infty} T$ in Lin(E, F) sowie $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein m_0 mit $\|T - T_{m_0}\| \leq \varepsilon$ und $TB_E \subseteq T_{m_0}B_E + \varepsilon B_F$. Außerdem existiert $M \subseteq F$ mit M endlich und $T_{m_0}B_E \subseteq M + \varepsilon B_F$. Daraus folgt $TB_E \subseteq M + \varepsilon B_F + \varepsilon B_F = M + 2\varepsilon B_F$ und so $T \in K(E, F)$. □

Beispiel 17.

a) $T \in$ Lin(E, F) wobei TE endliche Dimension hat (also hat T auch endlichen Rang). Dann folgt $T \in K(E, F)$. Dies gilt, da TB_E beschränkt in TE und TE wegen Vollständigkeit abgeschlossen in F ist. Also ist $\overline{TB_E}$ kompakt in TE (wegen $\dim(TE) < \infty$*) und so auch in F.*

b) Hat E endliche Dimension, folgt $K(E, F) =$ Lin(E, F) (da für alle $T \in$ Lin(E, F) $\dim(TE) < \infty$ *gilt).*

c) Seien $\mathcal{F}(E,T)$ alle Operatoren mit endlichem Rang. Dann gilt $\overline{\mathcal{F}(E,F)} \subseteq K(E,F)$.

Man kann sich die Frage stellen, ob sogar $\overline{\mathcal{F}(E,F)} = K(E,F)$ gilt. Dies ist im Allgemeinen zu verneinen, was 1971 von Enflo gezeigt wurde. Allerdings gilt die Gleichheit, wenn F ein Hilbertraum ist.

Lemma 2.3.4. *Sei E ein Banachraum und F ein Hilbertraum. Dann gilt*

$$\overline{\mathcal{F}(E,F)} = K(E,F).$$

Beweis. Wir müssen nur die Inklusion $\overline{\mathcal{F}(E,F)} \supseteq K(E,F)$ zeigen.
Sei $T \in K(E,F)$ und $\varepsilon > 0$. Da $\overline{TB_E}$ kompakt ist, existieren $B_\varepsilon(y_i), i = 1, \dots, m_\varepsilon$ mit $TB_E \subseteq \bigcup_{i=1}^{m_\varepsilon} B_\varepsilon(y_i)$. Sei $F_\varepsilon := \operatorname{span}\{y_1, \dots, y_{m_\varepsilon}\}$ und P_ε die orthogonale Projektion von F auf F_ε. Dann ist

$$\mathrm{Id} - P_\varepsilon$$

eine orthogonale Projektion von F auf $F_\varepsilon^\perp$ und aufgrund der Besselschen Ungleichung (Lemma 2.1.6) gilt

$$\|\mathrm{Id} - P_\varepsilon\| \leq 1.$$

Außerdem gilt für $T_\varepsilon := P_\varepsilon T$, dass $\mathfrak{R}(T_\varepsilon) \subseteq F_\varepsilon$ gilt und für $x \in B_1(0)$ existiert ein i mit $Tx \in B_\varepsilon(y_i)$ und

$$(T - T_\varepsilon)x = (\mathrm{Id} - P_\varepsilon)(Tx - y_i).$$

Wegen $\|\mathrm{Id} - P_\varepsilon\| \leq 1$ und $\|Tx - y_i\|_F < \varepsilon$ folgt $\|(T - T_\varepsilon)x\|_F \leq \varepsilon$ und so $\|T - T_\varepsilon\| \leq \varepsilon$. Mit $\varepsilon \to 0$ folgt die Behauptung. □

Beispiel 18. *Der in Beispiel 16 definierte Integraloperator $T\colon L^2(\Omega_1, \mathbb{K}) \to L^2(\Omega_2, \mathbb{K})$ ist kompakt. Denn wählt man ein vollständiges Orthonormalsystem $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $L^2(\Omega_1, \mathbb{K})$, erhalten wir mit Parseval*

$$\begin{aligned}
\|K\|^2 &= \int_{\Omega_2} \|\overline{K(x,\cdot)}\|_{L^2(\Omega_1,\mathbb{K})} \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\Omega_2} \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle \overline{K(x,\cdot)}, e_n\rangle_{L^2(\Omega_1,\mathbb{K})}|^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\Omega_2} \sum_{n\in\mathbb{N}} |Te_n(x)|^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \|Te_n\|^2_{L^2(\Omega_2,\mathbb{K})}.
\end{aligned}$$

Wir definieren nun die orthogonalen Projektionen P_n durch $P_n f = \sum_{k=1}^n \langle f, e_k\rangle_{L^2(\Omega_1,\mathbb{K})} e_k$. Dann gilt wegen Stetigkeit von T und Satz 2.1.7:

$$\begin{aligned}
\|Tf - TP_n f\|_{L^2(\Omega_2,\mathbb{K})} &= \left\| T\left(\sum_{k>n} \langle f, e_k\rangle_{L^2(\Omega_1,\mathbb{K})} e_k\right)\right\|_{L^2(\Omega_2,\mathbb{K})} \\
&= \left\| \sum_{k>n} \langle f, e_k\rangle_{L^2(\Omega_1,\mathbb{K})} Te_k \right\|_{L^2(\Omega_2,\mathbb{K})} \\
&\leq \sum_{k>n} \left|\langle f, e_k\rangle_{L^2(\Omega_1,\mathbb{K})}\right| \cdot \|Te_k\|_{L^2(\Omega_2,\mathbb{K})} \\
&\leq \underbrace{\left(\sum_{k>n} |\langle f, e_k\rangle_{L^2(\Omega_1,\mathbb{K})}|^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{\leq \|f\|_{L^2(\Omega_1,\mathbb{K})}} \cdot \underbrace{\left(\sum_{k>n} \|Te_k\|^2_{L^2(\Omega_2,\mathbb{K})}\right)^{\frac{1}{2}}}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt $\lim_{n\to\infty} TP_n = T$ *in* $Lin(L^2(\Omega_1,\mathbb{K}), L^2(\Omega_2,\mathbb{K}))$. *Da* $\mathfrak{R}(P_n)$ *und so auch* $\mathfrak{R}(TP_n) = T(\mathfrak{R}(P_n))$ *endlich-dimensional sind, folgt nach Lemma 2.3.4 die Kompaktheit von* T.

Man kann bei Vorhandensein entsprechender Integrabilität von K auch Integraloperatoren $T^{p,q}$ von $L^p(\Omega_1,\mathbb{K})$ nach $L^q(\Omega_2,\mathbb{K})$ mit $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ erhalten. Auch diese sind stetig, was man ähnlich wie im Fall $p=q=2$ beweisen kann – hier mit der Hölder-Ungleichung statt mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung. Der Nachweis der Kompaktheit verläuft über den Satz von Fréchet-Kolmogorov-Riesz, siehe [1]. Solche Operatoren nennt man auch *Hilbert-Schmidt-Integraloperatoren.*

Lemma 2.3.5 (Produkt kompakter Operatoren)**.** *Seien* X, Y, Z *Banachräume sowie* $T_1 \in Lin(X,Y)$ *und* $T_2 \in Lin(Y,Z)$. *Ist nun* T_1 *oder* T_2 *kompakt, folgt die Kompaktheit von* $T_2 \circ T_1$.

Beweis. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in X. Da T_1 stetig ist, ist $(T_1x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt in Y. Falls T_2 kompakt ist, folgt die Existenz einer konvergenten Teilfolge $(T_2T_1x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Falls T_1 kompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge $(T_1x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ und wegen der Stetigkeit von T_2 ist auch $(T_2T_1x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ konvergent. □

Bemerkung 17. *Das eben bewiesene Lemma 2.3.5 lässt sich für* $X = Y = Z$ *auch in der Sprache der Algebra ausdrücken. Mit der Verkettung* $\circ$ *als Multiplikation, wird der Vektorraum* $(Lin(X), +, \circ)$ *eine (nicht kommutative) Algebra. Das heißt, die Multiplikation erfüllt das Assoziativgesetz (aber nicht das Kommutativgesetz) und ist distributiv über der Addition. Außerdem gilt für alle Skalare* $\alpha \in K$ *die Identität*

$$\alpha(f\circ g) = (\alpha f)\circ g = f\circ(\alpha g).$$

Ferner gilt für $S, T \in Lin(X)$ *nach Lemme 1.3.3 die Ungleichung*

$$\|S\circ T\| \leq \|S\|\cdot\|T\|.$$

Eine Algebra mit einer Norm, die diese Ungleichung erfüllt, heißt Banachalgebra. Damit ist $(Lin(X), +, \circ, \|\cdot\|)$ *eine Banachalgebra. Und Lemma 2.3.5 besagt nun, dass* $K(X)$ *ein Ideal in dieser* Banachalgebra *ist.*

Satz 2.3.6 (Eigenschaften kompakter Operatoren)**.** *Sei* X *ein Banachraum,* $T \in K(X)$ *und* $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$ *sowie* $A = \lambda Id - T$, *dann gilt:*

1. $dim(kern(A)) < \infty$.
2. $\mathfrak{R}(A)$ *ist abgeschlossen in* X.
3. *A ist genau dann injektiv, wenn A surjektiv ist.*

Beweis. Wegen $\lambda\mathrm{Id} - T = \lambda(\mathrm{Id} - \frac{T}{\lambda})$ und da T genau dann kompakt ist, wenn $\frac{T}{\lambda}$ kompakt ist, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $\lambda = 1$ gilt.

1. Wegen $Ax = 0$ genau dann, wenn $x = Tx$, folgt $\overline{B_1(0)\cap \mathrm{Kern}(A)} \subseteq \overline{T(B_1(0))}$. Wegen Kompaktheit von $\overline{TB_1(0)}$ ist auch der Abschluss der Einheitskugel des Untervektorraums $\mathrm{Kern}(A)$ kompakt und somit muss $\mathrm{Kern}(A)$ endlich-dimensional sein.

2. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\lambda = 1$. Sei $x \in \overline{\mathfrak{R}(A)}$ und es gelte

$$\lim_{n\to\infty} Ax_n = x.$$

Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass $\|x_n\| \leq 2d_n$ mit $d_n := \operatorname{dist}(x_n, \operatorname{Kern}(A))$ gilt. Sonst wähle $a_n \in \operatorname{Kern}(A)$ mit $\|x_n - a_n\| \leq 2d_n$ und ersetze x_n durch $\tilde{x}_n := x_n - a_n$ (beachte hierbei $\operatorname{dist}(x_n, \operatorname{Kern}(A)) = \operatorname{dist}(\tilde{x}_n, \operatorname{Kern}(A))$).
Es existiert ein M so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$d_n \leq M < \infty$$

gilt, denn angenommen es gelte $d_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} \infty$ für eine Teilfolge $(d_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann gilt für $y_{n_k} = \frac{x_{n_k}}{d_{n_k}}$, dass $\lim_{k\to\infty} Ay_{n_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{Ax_{n_k}}{d_{n_k}} = 0$.
Da die y_{n_k} beschränkt sind $\left(\|y_k\| = \frac{\|x_{n_k}\|}{d_{n_k}} \leq \frac{d_{n_k}\cdot 2}{d_{n_k}} = 2\right)$ und T kompakt ist, existiert eine Teilfolge $y_{n_{k_\ell}}$ mit $Ty_{n_{k_\ell}} \xrightarrow{\ell\to\infty} y$ und folglich $y_{n_{k_\ell}} = Ay_{n_{k_\ell}} + Ty_{n_{k_\ell}} \xrightarrow{\ell\to\infty} y$. Wegen der Stetigkeit von A folgt $Ay = \lim_{\ell\to\infty} Ay_{n_{k_\ell}} = 0$ und damit ist $y \in \operatorname{Kern}(A)$. Daher gilt

$$\|y_{n_{k_\ell}} - y\| \geq \operatorname{dist}(y_{n_{k_\ell}}, \operatorname{Kern}(A)) = \operatorname{dist}\left(\frac{x_{n_{k_\ell}}}{d_{n_{k_\ell}}}, \operatorname{Kern}(A)\right) = \frac{\operatorname{dist}(x_{n_{k_\ell}}, \operatorname{Kern}(A))}{d_{n_{k_\ell}}} = 1,$$

ein Widerspruch. Da die d_n gleichmäßig beschränkt sind, muss $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge sein. Da T kompakt ist, existiert eine Teilfolge $(x_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ mit $Tx_{n_m} \xrightarrow{m\to\infty} z$. Also folgt

$$x \xleftarrow{m\to\infty} Ax_{n_m} = A(Ax_{n_m} + Tx_{n_m}) \xrightarrow{m\to\infty} A(x+z)$$

und so $x = A(x+z) \in \mathfrak{R}(A)$.

3.

"$\Rightarrow$" Sei A injektiv. Angenommen es existiert ein $x \in X \setminus \mathfrak{R}(A)$. Dann folgt $A^n x \in \mathfrak{R}(A^n) \setminus \mathfrak{R}(A^{n+1})$ für alle $n \geq 0$, denn wäre $A^n x = A^{n+1} y$ für ein y, so wäre $A^n(x - Ay) = 0$ und wegen $\operatorname{Kern}(A) = \{0\}$ folgt daraus induktiv $x - Ay = 0$, also $x \in \mathfrak{R}(A)$ und so erhalten wir einen Widerspruch.

Außerdem ist $\mathfrak{R}(A^{n+1})$ abgeschlossen, denn es ist

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= (\operatorname{Id} - T)^{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-T)^k \\ &= \operatorname{Id} - \underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^{k+1} T^k}_{\in K(X)}. \end{aligned}$$

Nach 2. ist daher $\mathfrak{R}(A^{n+1})$ abgeschlossen. Daher existiert $a_{n+1} \in \mathfrak{R}(A^{n+1})$ mit $0 < \|A^n x - a_{n+1}\| \leq 2 \operatorname{dist}(A^n x, \mathfrak{R}(A^{n+1}))$. Nun betrachten wir

$$x_n := \frac{A^n x - a_{n+1}}{\|A^n x - a_{n+1}\|} \in \mathfrak{R}(A^n).$$

Es gilt $\operatorname{dist}(x_n, \mathfrak{R}(A^{n+1})) \geq \frac{1}{2}$, denn für $y \in \mathfrak{R}(A^{n+1})$ gilt

$$\begin{aligned}
\|x_n - y\| &= \frac{\|A^n x - (a_{n+1} + \|A^n x - a_{n+1}\| y)\|}{\|A^n x - a_{n+1}\|} \\
&\geq \frac{\operatorname{dist}(A^n x, \mathfrak{R}(A^{n+1}))}{\|A^n x - a_{n+1}\|} \\
&\geq \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Für $m > n$ ist $Ax_n + x_m \in \mathfrak{R}(A^{n+1})$. Folglich erhält man

$$\begin{aligned}
\|Tx_n - Tx_m\| &= \|x_n - (Ax_n + x_m - Ax_m)\| \\
&\geq \operatorname{dist}\left(x_n, \mathfrak{R}(A^{n+1})\right) \geq \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Somit besitzt (Tx_n) keine konvergente Teilfolge, obwohl (x_n) beschränkt ist, was zu einem Widerspruch führt. Also muss A surjektiv sein.

"$\Leftarrow$" Sei A surjektiv. Dann ist also $\mathfrak{R}(A) = X$. Angenommen es existiere ein $x \in \operatorname{Kern}(A) \setminus \{0\}$. Dann können wir wegen der Surjektivität von A induktiv $x_k \in X$, $k \geq 2$ wählen mit

$$Ax_k = x_{k-1},$$

wobei wir vereinbaren $x_1 = x$. Dann ist

$$x_k \in \left(\operatorname{Kern}\left(A^k\right)\right) \setminus \left(\operatorname{Kern}\left(A^{k-1}\right)\right).$$

Nach dem Lemma von Riesz existiert dann ein $z_k \in \operatorname{Kern}\left(A^k\right)$ mit

$$\|z_k\| = 1$$

und

$$\operatorname{dist}\left(z_k, \operatorname{Kern}\left(A^{k-1}\right)\right) \geq \frac{1}{2}.$$

Für $l < k$ erhalten wir dann, dass

$$Az_k + z_l - Az_l \in \operatorname{Kern}\left(A^{k-1}\right)$$

gilt, also folgt nach der Wahl von z_k

$$\|Tz_k - Tz_l\| = \|z_k - \underbrace{(Az_k + z_l - Az_l)}_{\in \operatorname{Kern}\left(A^{k-1}\right)}\| \geq \operatorname{dist}\left(z_k, \operatorname{Kern}\left(A^{k-1}\right)\right) \geq \frac{1}{2}.$$

Das heißt, dass $(Tz_k)_{k\in\mathbb{N}}$ keine konvergente Teilfolge besitzt obwohl $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist. Und somit haben wir wieder einen Widerspruch.
Also muss A injektiv sein.

$\square$

Für den Rest dieses Kapitels sei X ein Banachraum über $\mathbb{C}$ und $T \in \operatorname{Lin}(X)$.

Definition 2.3.5.

1. *Die Menge* $\varrho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \operatorname{Id} - T$ *ist bijektiv* $\}$ *heißt* Resolventenmenge *von* T.

2. *Die Menge* $\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \varrho(T)$ *heißt* Spektrum *von* T.
Das Spektrum von T *kann zerlegt werden in das*
   - Punktspektrum
   $\sigma_p(T) := \{\lambda \in \sigma(T) : \lambda \operatorname{Id} - T$ *ist nicht injektiv.*$\}$,
   - kontinuierliches Spektrum
   $\sigma_c(T) := \{\lambda \in \sigma(T) : \lambda \operatorname{Id} - T$ *ist injektiv, nicht surjektiv und* $\overline{\mathfrak{R}(\lambda - T)} = X.\}$,
   - Residualspektrum
   $\sigma_r(T) := \{\lambda \in \sigma(T) : \lambda \operatorname{Id} - T$ *ist injektiv und* $\overline{\mathfrak{R}(\lambda - T)} \neq X.\}$.

3. *Sei* $\lambda \in \sigma_p(T)$, *dann existiert ein* $x \neq 0$ *mit* $Tx = \lambda x$. *In diesem Fall heißt* λ Eigenwert *und* x Eigenvektor *von* T. *Ist* X *ein Funktionenraum, so heißt* x *auch* Eigenfunktion. *Der Untervektorraum* $\operatorname{Kern}(\lambda \operatorname{Id} - T)$ *heißt* Eigenraum *von* T *zum Eigenwert* λ.
Der Eigenraum ist ein T-invarianter Unterraum, *das heißt, es gilt*
$$T(\operatorname{Kern}(\lambda \operatorname{Id} - T)) \subseteq \operatorname{Kern}(\lambda \operatorname{Id} - T).$$

Im weiteren Verlauf verwenden wir folgenden, nicht trivialen Satz aus der Banachraumtheorie, den wir später im Kapitel über Banachraumtheorie beweisen werden.

Satz 2.3.7. *Seien* E, F *Banachräume und sei* $L \in Lin(E, F)$ *bijektiv. Dann ist auch* L^{-1} *stetig, also* $L^{-1} \in Lin(F, E)$.

Korollar 2.3.8. *Sei* $\lambda \in \varrho(T)$, *dann gilt*
$$R(\lambda, T) := (\lambda - T)^{-1} \in Lin(X).$$
Dabei heißt $R(\lambda, T)$ Resolvente *von* T *in* λ *und* $\lambda \mapsto R(\lambda, T)$ *nennt man die* Resolventenfunktion.

Satz 2.3.9. *Die Resolventenmenge* $\varrho(T)$ *ist offen in* $\mathbb{C}$ *und die Resolventenfunktion ist eine holomorphe Abbildung von* $\varrho(T) \subseteq \mathbb{C}$ *nach* $Lin(X)$, *das heißt, der Grenzwert*
$$\lim_{\mathbb{C} \ni h \to 0} \frac{R(\lambda + h, T) - R(\lambda, T)}{h}$$
existiert in $Lin(X)$. *Außerdem gilt weiter für* $\lambda \in \varrho(T)$ *die Ungleichung*
$$\|R(\lambda, T)\|^{-1} \leq \operatorname{dist}(\lambda, \sigma(T)).$$

Beweis. Sei $\lambda_0 \in \varrho(T)$. Dann gilt für alle $\mu \in \mathbb{C}$:
$$(\lambda_0 - \mu) \operatorname{Id} - T = (\lambda_0 \operatorname{Id} - T) \underbrace{(\operatorname{Id} - \mu R(\lambda_0, T))}_{=: S(\mu)}.$$

Falls $|\mu| \cdot \|R(\lambda_0, T)\| < 1$ ist, ist der Operator $S(\mu)$ nach dem Satz über die Neumannsche Reihe invertierbar und es gilt $\lambda_0 - \mu \in \varrho(T)$ mit

$$R(\lambda_0 - \mu, T) = S(\mu)^{-1} R(\lambda_0, T) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \cdot R(\lambda_0, T)^{k+1}.$$

Daher ist $\varrho(T)$ offen. Außerdem lässt sich in einer hinreichend kleinen ε-Umgebung eines jeden $\lambda_0 \in \varrho(T)$ die Resolventenfunktion als Potenzreihe in $\lambda - \lambda_0$ mit Koeffizienten aus dem Bildraum $\mathrm{Lin}(X)$ darstellen, das heißt

$$\forall_{\lambda_0 \in \varrho(T)} \exists_{\varepsilon > 0} \forall_{\lambda \in B_\varepsilon(\lambda_0)} : R(\lambda, T) = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^k R(\lambda_0, T)^{k+1}.$$

Analog zum Beweis aus der Funktionentheorie folgt daraus, dass für $\lambda \in \varrho(T)$ die Abbildung $\lambda \mapsto R(\lambda, T)$ holomorph ist. Außerdem ist mit $d := \|R(\lambda, T)\|^{-1}$ die Kugel $B_d(\lambda) \subseteq \varrho(T)$ und somit $\mathrm{dist}(\lambda, \sigma(T)) \geq d$. □

Satz 2.3.10. *Das Spektrum $\sigma(T)$ ist kompakt. Und falls zusätzlich $X \neq \{0\}$ gilt, ist das Spektrum $\sigma(T)$ nicht leer mit*

$$\sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda| = \lim_{m \to \infty} \|T^m\|^{\frac{1}{m}} \leq \|T\|.$$

Dieser Wert wird dann Spektralradius *von T genannt.*

Beweis. Sei $\lambda \neq 0$. Falls $\|\frac{T}{\lambda}\| < 1$, also $|\lambda| > \|T\|$ gilt, dann ist

$$\lambda \operatorname{Id} - T = \lambda \left(\operatorname{Id} - \frac{T}{\lambda} \right)$$

invertierbar mit

$$R(\lambda, T) = \frac{1}{\lambda} \left(\operatorname{Id} - \frac{T}{\lambda} \right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{\lambda^{k+1}}.$$

Daraus folgt

$$r := \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda| \leq \|T\| \tag{2.1}$$

und

$$\|R(\lambda, T)\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{T}{\lambda} \right\|^k = \frac{1}{|\lambda|} \frac{1}{1 - \|\frac{T}{\lambda}\|}.$$

Da nun

$$\lambda^m \operatorname{Id} - T^m = (\lambda \operatorname{Id} - T)\, p_m(T) = p_m(T)(\lambda \operatorname{Id} - T)$$

mit $p_m(T) := \sum_{j=0}^{m-1} \lambda^{m-1-j} T^j$ gilt, folgt für alle $\lambda \in \sigma(T)$:

$$\begin{aligned} &\lambda^m \in \sigma(T^m) \\ &\overset{(2.1)}{\Longrightarrow} |\lambda^m| \leq \|T^m\| \\ &\Longrightarrow |\lambda| \leq \|T^m\|^{\frac{1}{m}}, \end{aligned}$$

womit wir $r \leq \liminf_{m \to \infty} \|T^m\|^{\frac{1}{m}}$ erhalten.

Bleibt also noch zu zeigen, dass $r \geq \limsup_{m\to\infty} \|T^m\|^{\frac{1}{m}}$ gilt.

Nach Satz 2.3.9 ist $\lambda \mapsto R(\lambda, T)$ eine in $\mathbb{C} \setminus \overline{B_r(0)}$ (bzw., falls $\sigma(T) = \emptyset$ ist, in $\mathbb{C}$) holomorphe Abbildung. Analog zum entsprechenden Beweis aus der Funktionentheorie erhält man daher, dass für alle $j \geq 0$ und für alle $s > r$ der Wert des Integrals

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_s(0)} \lambda^j R(\lambda, T) \,\mathrm{d}\lambda$$

unabhängig von s ist. Wählen wir nun $s > \|T\|$, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_s(0)} \lambda^j R(\lambda, T) \,\mathrm{d}\lambda &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_s(0)} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{j-k-1} T^k \,\mathrm{d}\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} s^{j-k} \left(\int_0^{2\pi} e^{i\varphi(j-k)} \,\mathrm{d}\varphi \right) T^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} s^{j-k} \delta_{jk} T^k = T^j.
\end{aligned}$$

Also haben wir jetzt

$$\|T^j\| = \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{\partial B_s(0)} \lambda^j R(\lambda, T) \,\mathrm{d}\lambda \right\| \leq \sup_{|\lambda|=s} \|R(\lambda, T)\| s^{j+1}.$$

Folglich erhalten wir für $s > r$ und jede Teilfolge von $(T^j)_{j\in\mathbb{N}}$:

$$\|T^j\|^{\frac{1}{j}} \leq s \left(\underbrace{s \cdot \sup_{|\lambda|=s} \|R(\lambda, T)\|}_{\text{beschränkt}} \right)^{\frac{1}{j}}.$$

Die rechte Seite konvergiert für $j \to \infty$ gegen s oder 0 und somit haben wir

$$\limsup_{j\to\infty} \|T^j\|^{\frac{1}{j}} \leq s.$$

Da dies für alle $s > r$ gilt, folgt die gewünschte Abschätzung

$$\limsup_{j\to\infty} \|T^j\|^{\frac{1}{j}} \leq r.$$

Außerdem erhalten wir, falls $\sigma(T) = \emptyset$ ist, dass für $j = 0$ und $s \searrow 0$ gilt, dass

$$\|\mathrm{Id}\| \leq s \cdot \sup_{|\lambda|\leq 1} \|R(\lambda, T)\| \to 0,$$

d.h. $\mathrm{Id} = 0$ und somit $X = \{0\}$ ist. □

Satz 2.3.11. *Sei $X \neq \{0\}$ ein Hilbertraum über $\mathbb{C}$ und $T \in \mathrm{Lin}(X)$ normal, dann gilt*

$$\sup_{\lambda\in\sigma(T)} |\lambda| = \|T\|.$$

Beweis. Sei ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit $T \neq 0$. Aufgrund von Satz 2.3.10 ist es hinreichend zu zeigen, dass für alle $m \geq 0$:

$$\|T^m\| \geq \|T\|^m$$

gilt (dann gilt somit insgesamt $\|T^m\| = \|T\|^m$).
Für $m = 0, 1$ ist dies trivial, deswegen betrachten wir hier $m \geq 1$. Für $x \in X$ gilt mit Hilfe von Lemma 2.3.2:

$$\begin{aligned}\|T^m x\|_X^2 &= \left\langle T^* T^m x, T^{m-1} x \right\rangle_X \\ &\leq \underbrace{= \|T^* T^m x\|_X}_{\|T^{m+1} x\|_X} \cdot \|T^{m-1} x\|_X \\ &\leq \|T^{m+1}\| \cdot \|T\|^{m-1} \cdot \|x\|_X^2 \\ \Rightarrow \|T^m\|^2 &\leq \|T^{m+1}\| \cdot \|T\|^{m-1}.\end{aligned}$$

Gilt also schon $\|T^m\| \geq \|T\|^m$, dann folgt per Induktion

$$\|T^{m+1}\| \geq \frac{\|T^m\|^2}{\|T\|^{m-1}} \geq \|T\|^{2m-(m-1)} = \|T\|^{m+1}.$$

$\square$

Satz 2.3.12. *Sei $T \in K(X)$. Dann besteht die Menge $\sigma(T) \backslash \{0\}$ aus abzählbar (also endlich oder abzählbar unendlich) vielen Eigenwerten mit 0 als einzig möglichem Häufungspunkt.*
Falls $\sigma(T)$ unendlich viele Elemente enthält, dann ist $\overline{\sigma(T)} = \sigma_p(T) \cup \{0\}$ und 0 ist Häufungspunkt von $\sigma(T)$.
Für $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ ist $\dim(\mathrm{Kern}(\lambda \,\mathrm{Id} - T)) < \infty$. (Diese Zahl nennt man auch die Vielfachheit *des Eigenwerts λ.)*
Ist $\dim(X) = \infty$, dann ist $0 \in \sigma(T)$.

Beweis. Sei $\lambda \neq 0$ und zudem $\lambda \notin \sigma_p(T)$, dann ist Kern $\left(\mathrm{Id} - \frac{T}{\lambda}\right) = \{0\}$ und damit nach Satz 2.3.6 $\Re\left(\mathrm{Id} - \frac{T}{\lambda}\right) = X$. Somit gilt $\sigma(T) \setminus \{0\} \subseteq \sigma_p(T)$.
Zusätzlich folgt aus Satz 2.3.6 auch die endliche Vielfachheit des Eigenwerts $\lambda \in \sigma_P(T) \setminus \{0\}$.

Sei $\dim(X) = \infty$ und angenommen $0 \notin \sigma(T)$, dann ist der Operator T bijektiv und nach Satz 2.3.7 ist $T^{-1} \in \mathrm{Lin}(X)$ und somit gilt

$$\mathrm{Id} = T^{-1} T \in K(X).$$

Und hier haben wir einen Widerspruch zur Annahme, denn demnach muss dann der Abschluss von $B_1(0)$ kompakt sein, aber wir haben angenommen, dass $\dim(X) = \infty$ gilt. Damit muss $0 \in \sigma(T)$ sein.

Ist $\sigma(T) \setminus \{0\}$ nicht endlich, so wählen wir $\lambda_n \in \sigma(T) \setminus \{0\}, n \in \mathbb{N}$, paarweise verschieden und Eigenvektoren $e_n \neq 0$ zu $X_n := \mathrm{span}\{e_1, ..., e_n\}$. Dann sind die Eigenvektoren e_k, $k = 1, ..., n$ linear unabhängig, denn wäre $1 < k \leq n$ mit $e_k = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i e_i$ mit schon bereits linear unabhängigen Vektoren $e_1, ..., e_{k-1}$, so würde

$$0 = Te_k - \lambda_k e_k = \sum_{i-1}^{k-1} \alpha_i \left(Te_i - \lambda_k e_i\right) = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha \underbrace{\left(\lambda_i - \lambda_k\right)}_{\neq 0} e_i$$

folgen, was uns zu dem Widerspruch

$$\alpha_i = 0$$

für $i = 1, ..., k-1$, also

$$e_k = 0$$

führen würde.
Nach dem Lemma von Riesz existiert ein $x_n \in X_n$ mit $\|x_n\| = 1$ und

$$\operatorname{dist}(x_n, x_{n-1}) \geq \frac{1}{2}. \tag{2.2}$$

Wegen $x_n = \alpha_n e_n + \widetilde{x_n}$ mit $\alpha_n \in \mathbb{C}$ und $\widetilde{x_n} \in X_{n-1}$ folgt wegen der T-Invarianz von X_{n-1}, dass

$$Tx_n - \lambda_n x_n = T\widetilde{x_n} - \lambda_n \widetilde{x_n} \in X_{n-1}$$

ist. Also gilt für $n > m$:

$$\frac{1}{\lambda_n}(Tx_n - \lambda_n x_n) - \frac{1}{\lambda_m} Tx_m \in X_{n-1}$$

Mit (2.2) erhalten wir

$$\left\| T\left(\frac{x_n}{\lambda_n}\right) - T\left(\frac{x_m}{\lambda_m}\right) \right\| = \left\| x_n + \frac{1}{\lambda_n}(Tx_n - \lambda_n x_n) - \frac{1}{\lambda_m} Tx_m \right\| \geq \frac{1}{2}.$$

Damit besitzt $T\left(\frac{x_n}{\lambda_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ keinen Häufungspunkt und da T kompakt ist besitzt $\left(\frac{x_n}{\lambda_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ keine beschränkte Teilfolge. Folglich geht $\left|\frac{1}{\lambda_n}\right| = \left\|\frac{x_n}{\lambda_n}\right\|$ für $n \to \infty$ gegen unendlich. Dies bedeutet

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0.$$

Insgesamt ist also 0 der einzig mögliche Häufungspunkt von $\sigma(T) \setminus \{0\}$.
Insbesondere ist dann $\sigma(T) \setminus B_r(0)$ endlich für jedes $r > 0$, also ist $\sigma(T) \setminus \{0\}$ abzählbar. □

Theorem 2.3.13 (Spektralsatz für kompakte, selbstadjungierte Operatoren)**.** *Sei H ein Hilbertraum über $\mathbb{C}$ und $T \neq 0$ ein kompakter, selbstadjungierter Operator auf H. Dann gilt:*

1. *Es gibt ein Orthonormalsystem in H aus Eigenvektoren $e_{k_{j_k}}$, $k \in N \subseteq \mathbb{N}$, $j_k \in \{1, ..., \dim(\operatorname{Kern}(\lambda_k \operatorname{Id} - T)) < \infty\}$ zu den von 0 verschiedenen Eigenwerten λ_k, $k \in \mathbb{N}$, von T mit $\lambda_{k_1} \neq \lambda_{k_2}$ für $k_1 \neq k_2$, das heißt, es gilt:*

   $$Te_{k_{j_k}} = \lambda_k e_{k_{j_k}},$$

   wobei $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\} = \sigma_p(T) \setminus \{0\}$. Falls N eine unendliche Menge ist, gilt $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0$.

2. *$H = \operatorname{Kern}(T) \bigoplus \overline{\operatorname{span}\{e_{k_{j_k}}\}}$, wobei $\overline{\operatorname{span}\{e_{k_{j_k}}\}} \perp \operatorname{Kern}(T)$ ist.*

3. *Für alle $x \in H$ gilt: $Tx = \sum_{k\in N} \lambda_k \langle x, e_{k_{j_k}} \rangle_H \, e_{k_{j_k}}$.*

4. *$\sigma_p(T) \subseteq [-\|T\|, \|T\|] \subseteq \mathbb{R}$.*

5. *$\|T\| \in \sigma_p(T)$ oder $-\|T\| \in \sigma_p(T)$.*

6. *Ist T positiv semidefinit, das heißt, für alle $x \in H$ gilt $\langle x, Tx \rangle_H \geq 0$, dann gilt $\sigma_p(T) \subseteq [0, \|T\|]$.*

Bemerkung 18. *Theorem 2.3.13 ist eine unendlich-dimensionale Verallgemeinerung des Theorems aus der Linearen Algebra über die reelle Diagonalisierbarkeit symmetrischer Matrizen mit Hilfe von Orthonormalbasen aus Eigenvektoren.*

Satz 2.3.14 (Spektralsatz für kompakte, normale Operatoren)**.** *Sei H ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum und $T \in K(H)$ normal mit $T \neq 0$. Dann gelten folgende Aussagen aus Theorem 2.3.13:*

1. *Es gibt ein Orthonormalsystem in H aus Eigenvektoren $e_{k_{j_k}}$, $k \in N \subseteq \mathbb{N}$, $j_k \in \{1, ..., \dim(\operatorname{Kern}(\lambda_k \operatorname{Id} - T)) < \infty\}$ zu den von 0 verschiedenen Eigenwerten λ_k, $k \in \mathbb{N}$, von T mit $\lambda_{k_1} \neq \lambda_{k_2}$ für $k_1 \neq k_2$, das heißt, es gilt:*
$$Te_{k_{j_k}} = \lambda_k e_{k_{j_k}},$$
wobei $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\} = \sigma_p(T) \setminus \{0\}$. Falls N eine unendliche Menge ist, gilt $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0$.

2. *$H = \operatorname{Kern}(T) \bigoplus \overline{\operatorname{span}\{e_{k_{j_k}}\}}$, wobei $\overline{\operatorname{span}\{e_{k_{j_k}}\}} \perp \operatorname{Kern}(T)$ ist.*

3. *Für alle $x \in H$ gilt: $Tx = \sum_{k\in N} \lambda_k \langle x, e_{k_{j_k}}\rangle_H \, e_{k_{j_k}}$.*

Beweis von Theorem 2.3.13 und Satz 2.3.14.

1. Da T nach Voraussetzung kompakt ist, besteht $\sigma(T) \setminus \{0\}$ nach Satz 2.3.12 aus Eigenwerten $\lambda_{\widetilde{k}}$, $\widetilde{k} \in \widetilde{N} \subseteq \mathbb{N}$ mit $\lambda_{\widetilde{k}} \xrightarrow{\widetilde{k}\to\infty} 0$, falls $\widetilde{N}$ unendlich ist.
In dieser Aufzählung sollen alle $\lambda_{\widetilde{k}}$ voneinander verschieden sein. Außerdem sind
$$E_{\widetilde{k}} := \operatorname{Kern}\left(\lambda_{\widetilde{k}} \operatorname{Id} - T\right)$$
endlich-dimensional. Wir definieren noch
$$E_0 := \operatorname{Kern}(T)$$
und $\lambda_0 = 0$.
Da T normal ist (selbstadjungiert impliziert auch normal), gilt nach dem Lemma 2.3.2 $\|Tx\| = \|T^*x\|$ für alle $x \in H$ und daher gilt
$$E_{\widetilde{k}} = \operatorname{Kern}\left(\overline{\lambda}_{\widetilde{k}} \operatorname{Id} - T^*\right)$$
für $\widetilde{k} \in \widetilde{N} \cup \{0\}$.
Daher gilt für alle $x_m \in E_m$ und für alle $x_l \in E_l$:
$$\begin{aligned}\lambda_m\langle x_m, x_l\rangle_H &= \langle Tx_m, x_l\rangle_H \\ &= \langle x_m, T^*x_l\rangle_H \\ &= \langle x_m, \overline{\lambda}_l x_l\rangle_H \\ &= \lambda_l\langle x_m, x_l\rangle_H.\end{aligned}$$
Da nun $\lambda_m \neq \lambda_l$ ist, folgt
$$\langle x_m, x_l\rangle_H = 0,$$
das heißt, dass die Eigenräume senkrecht aufeinander stehen, also gilt
$$E_k \perp E_l$$
für alle $k, l \in \widetilde{N} \cup \{0\}$ mit $k \neq l$.
Somit kann ein Orthonormalsystem aus Eigenvektoren gewählt werden.

2. Sei $y \in \left(\mathrm{Kern}(T) \bigoplus \overline{\mathrm{span}\{e_{k_{j_k}}\}}\right)^{\perp}$, zu zeigen ist dann, dass $y = 0$ gilt.
   Weiterhin gilt
$$y \in \left(\bigoplus_{\widetilde{k} \in \widetilde{N} \cup \{0\}} E_{\widetilde{k}} \right)^{\perp}.$$
   Sei $x \in E_{\widetilde{k}}, \widetilde{k} \in \widetilde{N} \cup \{0\}$, dann ist
$$\begin{aligned} \langle Ty, x \rangle_H &= \langle y, T^* x \rangle_H \\ &= \langle y, \overline{\lambda}_{\widetilde{k}} x \rangle_H \\ &= \lambda_{\widetilde{k}} \langle y, x \rangle_H = 0. \end{aligned}$$
   Und somit ist
$$Ty \in Y := \left(\bigoplus_{\widetilde{k} \in \widetilde{N} \cup \{0\}} E_{\widetilde{k}} \right)^{\perp}.$$
   Mit anderen Worten ist nun Y ein T-invarianter, abgeschlossener Unterraum von H.
   Sei nun $T_0 := T \mid_Y$, dann ist T_0 kompakt und normal. Da T_0 normal ist, gibt es, falls $Y \neq \{0\}$ ist, nach dem Satz 2.3.11 ein $\lambda \in \sigma(T_0)$ mit $|\lambda| = \|T_0\|$.
   Wäre $T_0 \neq 0$, so wäre nach Satz 2.3.12 $\lambda \in \sigma_P(T_0)$, also auch $\lambda \in \sigma_P(T)$, das heißt $E_{\widetilde{k}} \cap Y \neq 0$ für ein $\widetilde{k} \in \widetilde{N}$. Also ist $T_0 = 0$, das heißt dann aber nun auch, dass $Y \subseteq \mathrm{Kern(T)} = E_0$, somit ist
$$Y \subset E_0 \cap E_0^{\perp} = \{0\}.$$
   Dann muss $Y = \{0\}$ sein.

3. Sei $P_{\widetilde{k}}$ die orthogonale Projektion auf $E_{\widetilde{k}}$, dann gilt für alle $x \in H$
$$x = \sum_{\widetilde{k} \in \widetilde{N} \cup \{0\}} P_{\widetilde{k}} x.$$
   Und damit folgt für alle $x \in H$
$$Tx = \sum_{\widetilde{k} \in \widetilde{N} \cup \{0\}} T P_{\widetilde{k}} x = \sum_{\widetilde{k} \in \widetilde{N}} \lambda_{\widetilde{k}} P_{\widetilde{k}} x.$$
   Mit $d_{\widetilde{k}} := \dim\left(E_{\widetilde{k}}\right)$ können wir Orthonormalbasen $\left(e_{\widetilde{k}_1}, ..., e_{\widetilde{k}_{d_{\widetilde{k}}}}\right)$ von $E_{\widetilde{k}}$ wählen.
   Somit erhalten wir
$$\begin{aligned} P_{\widetilde{k}} x &= \sum_{j=1}^{d_{\widetilde{k}}} \left\langle P_{\widetilde{k}} x, e_{\widetilde{k}_j} \right\rangle_H e_{\widetilde{k}_j} \\ &= \sum_{j=1}^{d_{\widetilde{k}}} \left\langle x, e_{\widetilde{k}_j} \right\rangle_H e_{\widetilde{k}_j}. \end{aligned}$$
   Bildet man jetzt noch die Summe über alle $P_{\widetilde{k}}$, dann erhält man
$$Tx = \sum_{k \in N} \lambda_k \langle x, e_{k_{j_k}} \rangle_H e_{k_{j_k}}.$$

4. Sei nun $\lambda \in \sigma_p(T)$ und x sei ein zugehöriger Eigenvektor, dann gilt

$$\begin{aligned}\lambda\|x\|_H^2 &= \langle \lambda x, x\rangle_H = \langle Tx, x\rangle_H = \langle x, Tx\rangle_H \\ &= \langle x, \lambda x\rangle_H = \overline{\lambda}\|x\|_H^2.\end{aligned}$$

   Und da $x \neq 0$ ist, folgt $\lambda = \overline{\lambda}$. Damit gilt $\lambda \in \mathbb{R}$.

5. Zu zeigen ist, dass $\|T\| \in \sigma_p(T)$ oder $-\|T\| \in \sigma_p(T)$ gilt. Da $\lambda \in \mathbb{R}$ und $T \neq 0$ gilt, folgt dies direkt aus Satz 2.3.11 und aus Satz 2.3.12.

6. Zu zeigen ist, dass wenn T positiv semidefinit ist, dann gilt $\sigma_p(T) \subseteq [0, \|T\|]$. Dies folgt direkt aus der Gleichheit

$$\lambda\|x\|_H^2 = \langle Tx, x\rangle_H = \langle x, Tx\rangle_H.$$

□

Bemerkung 19. *Anhand des Beweises erkennt man, dass die Aussagen 4. und 6. auch gelten, falls T nur ein selbstadjungierter, stetiger Operator, aber nicht kompakt ist.*

Bemerkung 20. *Ist X ein Banachraum über $\mathbb{R}$, so kann man X komplexifizieren, das heißt, sei $\widetilde{X} := X \times X$ und für $x = (x_1, x_2) \in \widetilde{X}$, $\alpha = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ sei $\alpha x := (ax_1 - bx_2, ax_2 + bx_1)$ und $\overline{x} := (x_1, -x_2)$. Damit wird $\widetilde{X}$ zu einem Vektorraum über $\mathbb{C}$ und mit*

$$\|x\|_{\widetilde{X}} := \sup_{\theta\in\mathbb{R}} \left(\|\cos(\theta)x_1 - \sin(\theta)x_2\|_X^2 + \|\sin(\theta)x_1 + \cos(\theta)x_2\|_X^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Für alle $x \in \widetilde{X}$ und $\theta \in \mathbb{R}$ gilt dann:

$$\|e^{i\theta x}\|_{\widetilde{X}} = \|x\|_{\widetilde{X}}.$$

Dadurch wird $\widetilde{X}$ zu einem Banachraum über $\mathbb{C}$. Falls X ein Hilbertraum ist, so ist $\widetilde{X}$ dann ein Hilbertraum über $\mathbb{C}$.

Sei $T \in \mathrm{Lin}(X)$, dann ist durch $\widetilde{T}x := (Tx_1, Tx_2)$ ein stetiger linearer Operator $\widetilde{T}$ auf $\widetilde{x}$ definiert.
Zusätzliche Eigenschaften, wie Kompaktheit oder Selbstadjungierung übertragen sich von T auf $\widetilde{T}$. Somit kann man mit Hilfe dieser Komplexifizierung Spektralsätze wie Theorem 2.3.13 auch auf reelle Hilberträume übertragen.
Entsprechendes gilt für Spektralsätze in reellen Banachräumen.

Satz 2.3.15 (Charakterisierung von Eigenwerten)**.** *Sei H ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum und $T \neq 0$ ein kompakter, selbstadjungierter Operator auf H. Dann gilt falls*

$$\lambda := \sup_{\substack{u\in H,\\ u\neq 0}} \mathcal{R}_T(u) := \sup_{\substack{u\in H,\\ u\neq 0}} \frac{\langle Tu,u\rangle_H}{\langle u,u\rangle_H} = \sup_{\substack{u\in H,\\ \|u\|_H=1}} \langle Tu,u\rangle_H$$

ungleich 0 ist, dass λ der größte von 0 verschiedene Eigenwert von T und das Supremum wird von allen Eigenvektoren zum Eigenwert λ angenommen.
Falls

$$\mu := \inf_{\substack{u\in H,\\ u\neq 0}} \mathcal{R}_T(u) \neq 0$$

ist, dann ist μ der kleinste von 0 verschiedene Eigenwert von T und das Infimum wird von allen Eigenvektoren zum Eigenwert λ angenommen.
Für alle von 0 verschiedene Eigenwerte sind die Lösungen der jeweiligen Eigenwertgleichungen die Lösungen von Variationsproblemen mit Nebenbedingung, wobei die Eigenwerte als Lagrangeparameter auftauchen.
Den zweitgrößte, von Null verschiedenen Eigenwert erhält man durch

$$\sup_{\substack{u\in H,\\ u\neq 0,\\ u\perp \mathrm{Kern}(\lambda Id - T)}} \mathcal{R}_T(u).$$

Entsprechend fortsetzten kann man dieses Verfahren für die anderen von Null verschiedenen Eigenwerte.
$\mathcal{R}_T(u)$ nennt man auch den Rayleigh-Quotienten *von u.*

Beweis. Sei $\lambda \neq 0$ und $a(u,v) := \langle \lambda u - Tu, v\rangle_H$. Dann ist a eine positiv semidefinite, hermitesche Sequilinearform von $H \times H$ nach $\mathbb{C}$ (hierbei geht ein, dass $\lambda \in \mathbb{R}$ und T selbstadjungiert sind). Analog zum Beweis der Cauchy-Schwarz-Ungleichung zeigt man, dass

$$|a(u,v)| \leq \sqrt{a(u,u)}\sqrt{a(v,v)}$$

für alle $u, v \in H$ gilt. Dementsprechend erhalten wir

$$\begin{aligned} |\langle \lambda u - Tu, v\rangle_H| &\leq \langle \lambda u - Tu, u\rangle^{\frac{1}{2}} \langle \lambda v - Tv, v\rangle^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \langle \lambda u - Tu, u\rangle^{\frac{1}{2}} \|\lambda v - Tv\|_H^{\frac{1}{2}} \|v\|_H^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|\lambda \operatorname{Id} - T\|_H^{\frac{1}{2}} \|v\|_H \langle \lambda u - Tu, u\rangle^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Für $v = \lambda u - Tu$ erhält man

$$\|\lambda u - Tu\|_H \leq C \cdot \langle \lambda u - Tu, u\rangle_H^{\frac{1}{2}}, \tag{2.3}$$

wobei C unabhängig von u ist.
Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in H mit $\|u_n\| = 1$ und $\langle Tu_n, u_n\rangle \xrightarrow{n\to\infty} \lambda$. Da T kompakt ist, hat $(Tu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge $(Tu_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $Tu_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} w$ für ein $w \in H$.
Somit konvergiert $\|\lambda u_{n_k} - w\|_H$ mit Hilfe von (2.3)

$$\|\lambda u_{n_k} - w\|_H \leq \underbrace{\|\lambda u_{n_k} - Tu_{n_k}\|}_{\xrightarrow{k\to\infty} 0} + \underbrace{\|Tu_{n_k} - w\|_H}_{\xrightarrow{k\to\infty} 0} \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

und damit

$$u_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{w}{\lambda} =: u$$

mit $\lambda \neq 0$.
Wegen $\|u_{n_k}\| = 1$ folgt $\|u\| = 1$. Außerdem gilt

$$Tu_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} w = \lambda u.$$

Wegen der Stetigkeit von T gilt aber auch folgende Konvergenz

$$Tu_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} Tu.$$

Also erhalten wir $Tu = \lambda u$, das heißt nichts anderes als, dass λ Eigenwert von T mit Eigenvektor u ist.
Sei $\widetilde{\lambda}$ nun ein weiterer Eigenwert von T mit einem Eigenvektor v, dann ist $\widetilde{\lambda} = \mathcal{R}_T(v) \leq \lambda$.
Durch iteratives Fortsetzen des Verfahren erhält man die Aussagen über die anderen Eigenwerte. $\square$

Definition 2.3.6 ((Schwacher) Inverser Laplace-Operator)**.** *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes, stückweise C^1-berandetes Gebiet. Dann ist der* (schwache) inverse Laplace-Operator *(mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen)*

$$\Delta^{-1} : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega),\ f \mapsto \Delta^{-1} f$$

definiert durch die nach Satz 2.2.9 für jedes $f \in L^2(\Omega)$ eine eindeutige Lösung $\Delta^{-1} f \in H_0^1(\Omega)$ von

$$\int_\Omega \nabla\Delta^{-1} f \cdot \nabla\varphi + f\varphi \,\mathrm{d}\lambda = 0$$

für alle $\varphi \in H_0^1(\Omega)$.

Satz 2.3.16 (Satz von Rellich)**.** *Sei Ω wie in Definition 2.3.6, dann ist die Einbettung*

$$\mathrm{Id} : H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$$

ein kompakter Operator, das heißt, jede beschränkte Folge in $H^1(\Omega)$ besitzt bezüglich der L^2-Norm eine konvergente Teilfolge.

Beweis. Wir unterteilen Ω in endlich viele Teilgebiete Ω_j mit Durchmesser $\leq \frac{1}{n}$ und definieren

$$T_n : H^1(\Omega) \to L^2(\Omega) \text{ durch } T_n\nu|_{\Omega_j} = M_{\Omega_j}\nu,$$

wobei $M_{\Omega_j}\nu$ der Mittelwert von ν auf Ω_j ist. Da $\mathfrak{R}(T_n)$ endlich-dimensional ist, ist T_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ kompakt.
Weiter ergibt sich mit Hilfe der Poincaré-Ungleichung mit Mittelwert (siehe Übungen)

$$\begin{aligned}
\|T_n\nu - \nu\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \sum_j \|M_{\Omega_j}\nu - \nu\|_{L^2(\Omega_j)}^2 \\
&\leq c \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \sum_j \|\nu\|_{H_0^1(\Omega_j)}^2 \\
&\leq c \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \|\nu\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\
&\leq \frac{1}{n^2} \cdot c \cdot \|\nu\|_{H^1(\Omega)}^2,
\end{aligned}$$

woraus wir erhalten

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n - \mathrm{Id}\| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{c}}{n} = 0.$$

Nach Lemma 2.3.3 muss daher $\mathrm{Id} : H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ kompakt sein. $\square$

Satz 2.3.17 (Eigenschaften von $-\Delta^{-1}$)**.** *Der (schwache) inverse negative Laplace-Operator $-\Delta^{-1}$ ist ein injektiver, positiv semidefinierter, kompakter, selbstadjungierter Operator auf $L^2(\Omega)$.*

Beweis. Nach Satz 2.2.9 ist der (schwache) inverse negative Laplace-Operator $-\Delta^{-1} : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ wohldefiniert und für alle $f \in L^2(\Omega)$ existiert ein $c > 0$ mit

$$\|-\Delta^{-1} f\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c \cdot \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Da nun ∇ linear ist und auch, wegen der Linearität vom Integral, $-\Delta^{-1}$ linear ist, ist $-\Delta^{-1} : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ stetig.
Aufgrund des Satzes von Rellich und nach Lemma 2.3.5 ist $-\Delta^{-1} : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega) \subseteq H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) = \mathrm{Id} \circ (-\Delta^{-1})$ kompakt als Operator von $L^2(\Omega)$ nach $L^2(\Omega)$.
Weiter folgt aus $-\Delta^{-1} f = 0$, dass für alle $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega f\varphi \,\mathrm{d}\lambda = 0$$

gilt. Damit folgt dann aus dem Fundamentallemma der Variationsrechnung, dass $f = 0$ fast überall in Ω gilt. Somit ist $-\Delta^{-1}$ injektiv.

Sei nun $g \in L^2(\Omega)$ und $\varphi = -\Delta^{-1} g$, dann gilt:

$$\begin{aligned}\langle f, -\Delta^{-1} g\rangle_{L^2} &= \int_\Omega \nabla\Delta^{-1} f \cdot \nabla\Delta^{-1} g \,\mathrm{d}\lambda \\ &= \int_\Omega \nabla\Delta^{-1} g \cdot \nabla\Delta^{-1} f \,\mathrm{d}\lambda \\ &= \langle g, -\Delta^{-1} f\rangle_{L^2}.\end{aligned}$$

Also ist $-\Delta^{-1}$ auch ein selbstadjungierter Operator. Und außerdem gilt für $f = g$:

$$\langle f, -\Delta^{-1} f\rangle_{L^1} = \int_\Omega |\nabla\Delta^{-1} f|^2 \,\mathrm{d}\lambda \geq 0.$$

Und somit ist $-\Delta^{-1}$ auch ein positiv semidefiniter Operator. $\square$

Satz 2.3.18 (Spektralsatz für den Laplace-Operator)**.** *Sei* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *ein beschränktes und stückweise* C^1*-berandetes Gebiet. Sei* $\Delta := (\Delta^{-1})^{-1} : \Delta^{-1}(L^2(\Omega)) \to L^2(\Omega)$ *der schwache Laplace-Operator, dann gilt:*

1. $\sigma_p(-\Delta) = \{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$ *mit* $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ...$ *sowie* $\dim(\operatorname{Kern}(\lambda_k \operatorname{Id} + \Delta)) < \infty$ *und* $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = \infty$.

2. *Es existieren Funktionen* e_k, $k \in \mathbb{N}$ *aus* $H_0^1(\Omega)$, *so dass* $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *ein vollständiges Orthonormalsystem in* $L^2(\Omega)$ *aus Eigenvektoren von* $-\Delta$ *ist, das heißt, es gilt*

$$\forall_{\varphi \in H_0^1(\Omega)} : \ \langle e_k, \varphi \rangle_{H_0^1} = \lambda_k \langle e_k, \varphi \rangle_{L^2}$$

und

$$\forall_{u \in L^2(\Omega)} : \ u = \sum_{k=1}^{\infty} \langle e_k, u \rangle_{L^2} e_k \ \text{ bezüglich } L^2 \text{ und } \ \|u\|_{L^2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \langle e_k, u \rangle_{L^2}^2 .$$

3.

$$\lambda_1 = \min \left\{ \frac{\|u\|_{H_0^1}^2}{\|u\|_{L^2}^2} : u \in H_0^1, \, u \neq 0 \right\},$$

$$\vdots$$

$$\lambda_{k+1} = \min \left\{ \frac{\|u\|_{H_0^1}^2}{\|u\|_{L^2}^2} : u \in H_0^1, \, u \neq 0, \, u \perp \operatorname{span}\{e_j, j = 1, ..., k\} \right\}.$$

Beweisidee. Dieser Satz folgt aus dem Satz 2.3.17, der Bemerkung 20, dem Theorem 2.3.13 und dem Satz 2.3.15. Die Tatsache, dass es unendlich viele Eigenwerte gibt, folgt daraus, dass $L^2(\Omega)$ unendlich-dimensional ist, alle Eigenräume aber nur endlich-dimensional. □

3. Banachraumtheorie

3.1. Der Satz von Hahn-Banach und die Hauptsätze der Banachraumtheorie

Der Satz von Hahn-Banach

Theorem 3.1.1 (Satz von Hahn-Banach). *Sei X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und sei*

1. *Die Abbildung $p : X \to \mathbb{R}$* sublinear, *das heißt, es gilt:*
   - *Für alle $x, y \in X$ gilt: $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.*
   - *Für alle $x \in X$ und für alle $\alpha \geq 0$ gilt: $p(\alpha x) = \alpha p(x)$.*
2. *Die Abbildung $f : Y \to \mathbb{R}$ ist linear, wobei Y ein Unterverktorraum von X ist.*
3. *Für alle $x \in Y$ gilt $f(x) \leq p(x)$.*

Dann gibt es eine lineare Abbildung $F : X \to \mathbb{R}$ mit $F(x) = f(x)$ für $x \in Y$ und $F(x) \leq p(x)$ für $x \in X$.

Beweis. Wir betrachten die Klasse aller Fortsetzungen von f, also

$M := \{(Z, g) :$ Z sei ein Unterraum, $Y \subseteq Z \subseteq X$, $g : Z \to \mathbb{R}$ linear, $g = f$ auf Y, $g \leq p$ auf $Z\}$.

Betrachte irgendein $(Z, g) \in M$ mit $Z \neq X$ und $z_0 \in X \setminus Z$. Wir wollen g zumindest auf $Z_0 := \operatorname{span}\{Z \cup \{z_0\}\} = Z \bigoplus \operatorname{span}\{z_0\}$ fortsetzen und gehen dabei folgendermaßen vor.
Wir setzten für $z \in Z$ und $\alpha \in \mathbb{R}$

$$g_0(z + \alpha z_0) := g(z) + c\alpha$$

an. Dabei ist c geeignet zu wählen, so dass $(Z_0, g_0) \in M$ ist.
Nun ist es klar, dass g_0 auf Z_0 linear und $g_0 = g = f$ auf Y ist. Es bleibt somit nur noch zu zeigen, dass für alle $z \in Z$ und für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ folgendes gilt

$$g(z) + c\alpha \leq p(z + \alpha z_0). \tag{3.1}$$

Nach Voraussetzung ist $g \leq p$ auf Z und damit ist obige Ungleichung schon für $\alpha = 0$ erfüllt.
Für $\alpha > 0$ bedeutet dies:

$$c \leq \frac{1}{\alpha}\left(p(z + \alpha z_0) - g(z)\right) = p\left(\frac{z}{\alpha} + z_0\right) - g\left(\frac{z}{\alpha}\right)$$

und für $\alpha < 0$ bedeutet dies:

$$c \geq g\left(-\frac{z}{\alpha}\right) - p\left(-\frac{z}{\alpha} - z_0\right).$$

Somit muss also

$$\sup_{z \in Z} (g(z) - p(z - z_0)) \leq c \leq \inf_{z \in Z} (p(z + z_0) - g(z))$$

gelten. Und dies ist möglich, denn es gilt für alle $z, z' \in Z$:

$$\begin{aligned} g(z') + g(z) = g(z' + z) & \\ &\leq p(z' + z) = p(z' - z_0 + z + z_0) \\ &\leq p(z' - z_0) + p(z + z_0) \end{aligned}$$

und somit

$$g(z') - p(z' - z_0) \leq p(z + z_0) - g(z).$$

Um durch diesen Fortsetzungsprozess ein $(X, F) \in M$ zu finden, benutzen wir das zum Auswahlaxiom äquivalente *Lemma von Zorn*:

Sei $(M, \leq)$ eine nichtleere, partiell geordnete Menge (das heißt, aus $m_1 \leq m_2$ und $m_2 \leq m_3$ folgt $m_1 \leq m_3$ und für alle $m \in M$ gilt $m \leq m$), so dass jede total geordnete Teilmenge N (das heißt, für alle $n_1, n_2 \in N$ gilt $n_1 \leq n_2$ oder $n_2 \leq n_1$) eine obere Schranke besitzt (das heißt, es gibt ein $m \in M$ mit $n \leq m$ für alle $n \in N$). Dann besitzt M ein maximales Element (das heißt, es gilt $m_0 \in M$, sodass für alle $m \in M$ gilt: aus $m_0 \leq m$ folgt $m \leq m_0$).

In unserem Fall hier ist dann eine Ordnung durch

$$(Z_1, g_1) \leq (Z_2, g_2) \;:\Leftrightarrow\; Z_1 \subseteq Z_2 \;\wedge\; g_2|_{Z_1} = g_1$$

definiert.

Sei also $N \subseteq M$ total geordnet. Wir definieren

$$\begin{aligned} Z_* &:= \bigcup_{(Z,g) \in N} Z, \\ g_*(x) &:= g(x), \text{ falls } x \in Z \text{ und } (Z, g) \in N. \end{aligned}$$

Dann gilt folgende Inklusionen $Y \subseteq Z_* \subseteq X$ und g_* ist wohldefiniert, denn für $x \in Z_1 \cap Z_2$, $(Z_1, g_1) \in N$ und $(Z_2, g_2) \in N$ folgt wegen der totalen Ordnung von N:

$$(Z_1, g_1) \leq (Z_2, g_2) \;\vee\; (Z_2, g_2) \leq (Z_1, g_1).$$

Im ersten Fall haben wir $Z_1 \subseteq Z_2$ und $g_2 = g_1$ auf Z_1, also folgt, da $x \in Z_1$ ist,

$$g_2(x) = g_1(x).$$

Entsprechendes gilt für den zweiten Fall.

Die Eigenschaften $g_* = f$ auf Y und $g_* \leq p$ auf Z_* übertragen sich. Die Linearität von Z_* und g_* sieht man wie folgendermaßen. Sind $x, y \in Z_*$ und $\alpha \in \mathbb{R}$, dann existiert ein $(Z_x, g_x) \in N$ und ein $(Z_y, g_y) \in N$ mit

$$x \in Z_x \;\wedge\; y \in Z_y.$$

Also gilt $(Z_x, g_x) \leq (Z_y, g_y)$ oder $(Z_y, g_y) \leq (Z_x, g_x)$.
Damit haben wir für $x, y \in Z_\xi$ mit $\xi = y$ im ersten Fall und $\xi = x$ im zweiten Fall $x + \alpha y \in Z_\xi \subseteq Z_*$ und

$$g_*(x + \alpha y) = g_\xi(x + \alpha y) = g_\xi(x) + \alpha g_\xi(y) = g_*(x) + \alpha g_*(y).$$

Wir haben gezeigt, dass alle Voraussetzungen des Lemmas von Zorn erfüllt sind. Somit hat M mit (Z, g) ein maximales Element.

Letztendlich bleibt noch zu zeigen, dass $Z = X$ gilt. Dies beweisen wir durch einen Widerspruchsbeweis.
Angenommen $Z \neq X$, dann liefert der Fortsetzungsprozess vom Beginn des Beweises ein $(Z_0, g_0) \in M$ mit $(Z, g) \leq (Z_0, g_0)$ und $Z_0 \neq Z$. Und damit haben wir schon den gesuchten Widerspruch zur Maximalität von (Z, g). Also muss $Z = X$ gelten. $\square$

Satz 3.1.2 (Satz von Hahn-Banach für lineare Funktionale)**.** *Sei X ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum und Y ein Untervektorraum (mit der Norm von X). Dann gibt es zu jedem y' aus dem Dualraum Y' ein $x' \in X'$ mit $x' = y'$ auf Y und*

$$\|x'\|_{X'} = \|y'\|_{Y'}.$$

Beweis.

1. Fall: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
   Wir setzen $p(x) := \|y'\|_{Y'} \|x\|_X$ für alle $x \in X$. Damit erhalten wir dann für alle $y \in Y$:
   $$y'(y) \leq \|y'\|_{Y'} \|y\|_Y = \|y'\|_{Y'} \|y\|_X = p(y).$$
   Also gibt es nach Theorem 3.1.1 eine lineare Abbildung $x' : X \to \mathbb{R}$ mit $x' = y'$ auf Y und $x' \leq p$ auf X. Somit gilt
   $$\pm x'(x) = x'(\pm x) \leq p(\pm x) = \|y'\|_{Y'} \|x\|_X,$$
   deshalb folgt $x' \in X'$ mit $\|x'\|_{X'} \leq \|y'\|_{Y'}$. Wegen $x' = y'$ auf Y gilt außerdem
   $$\begin{aligned} \|y'\|_{Y'} &= \sup_{\substack{y \in Y, \\ \|y\|_X \leq 1}} |y'(y)| \\ &= \sup_{\substack{y \in Y, \\ \|y\|_X \leq 1}} |x'(y)| \\ &\leq \|x'\|_{X'}. \end{aligned}$$
   Somit haben wir nun $\|y'\|_{Y'} = \|x'\|_{X'}$.

2. Fall: $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
   Wir fassen X und Y als normierte $\mathbb{R}$-Vektorräume $X_\mathbb{R}$ und $Y_\mathbb{R}$ auf (das heißt, dass die Skalarmultiplikation nur für reelle Zahlen erfolgt, aber die Normen bleiben erhalten). Weiter seien $X'_\mathbb{R}$ und $Y'_\mathbb{R}$ die zugehörigen Dualräume. Für $y' \in Y'$ ist dann $y'_{re} := \mathrm{Re}(y') \in Y'_\mathbb{R}$ mit $\|y'_{re}\|_{Y'_\mathbb{R}} \leq \|y'\|_{Y'}$ und
   $$y'(x) = \mathrm{Re}(y'(x)) + i \cdot \mathrm{Im}(y'(x)) = y'_{re}(x) - i \cdot y'_{re}(ix).$$

Nach dem 1.Fall existiert eine Fortsetzung x'_{re} von y'_{re} auf $X_{\mathbb{R}}$ mit

$$\|x'_{re}\|_{X'_{\mathbb{R}}} = \|y'_{re}\|_{Y'_{\mathbb{R}}}.$$

Definiere $x'(x) := x'_{re}(x) - i \cdot x'_{re}(ix)$, dann ist $x' = y'$ auf Y und $x' : X \to \mathbb{C}$ ist $\mathbb{C}$-linear. Denn x' ist $\mathbb{R}$-linear und für $x \in X$ ist

$$\begin{aligned} x'(ix) &= x'_{re}(ix) - i \cdot x'_{re}(-x) = x'_{re}(ix) + i \cdot x'_{re}(x) \\ &= i \cdot (-i \cdot x'_{re}(ix) + x'_{re}(x)) \\ &= i \cdot x'(x). \end{aligned}$$

Sei $x \in X$, dann hat $x'(x) \in \mathbb{C}$ eine Darstellung $x'(x) = r \cdot e^{i\theta}$ mit $\theta \in \mathbb{R}$ und $r \geq 0$. Damit folgt dann:

$$\begin{aligned} |x'(x)| = r &= \operatorname{Re}\left(e^{-i\theta} x'(x)\right) = \operatorname{Re}\left(x'\left(e^{-i\theta} x\right)\right) \\ &= x'_{re}\left(e^{-i\theta} x\right) \\ &\leq \|x'_{re}\|_{X'_{\mathbb{R}}} \|x\|_X \\ &= \|y'_{re}\|_{Y'_{\mathbb{R}}} \|x\|_X \\ &\leq \|y'\|_{Y'} \|x\|_X. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass für $x' \in X'$ mit $\|x'\|_{X'} \leq \|y'\|_{Y'}$. Da x' Fortsetzung von y' ist, muss andererseits $\|x'\|_{X'} \geq \|y'\|_{Y'}$ gelten. Also gilt insgesamt

$$\|x'\|_{X'} = \|y'\|_{Y'}.$$

□

Anwendungen des Satzes von Hahn-Banach

Satz 3.1.3. *Sei Y ein abgeschlossener Unterraum eines normierten Raumes X und $x_0 \notin Y$. Dann gibt es ein $x' \in X'$ mit $x' = 0$ auf Y, $\|x'\|_{X'} = 1$ und $x'(x_0) = \operatorname{dist}(x_0, Y)$.*

Beweis. Wir definieren auf $Y_0 := \operatorname{span}\{Y \cup \{x_0\}\} = Y \bigoplus \operatorname{span}\{x_0\}$ für alle $y \in Y$ und für alle $\alpha \in \mathbb{K}$

$$y'_0(y + \alpha x_0) := \alpha \operatorname{dist}(x_0, Y).$$

Dann ist $y'_0 : Y_0 \to \mathbb{K}$ linear und $y'_0|_Y \equiv 0$.

Bleibt zu zeigen dass $y'_0 \in Y'_0$ mit $\|y'_0\|_{Y'_0} = 1$ gilt. Dann folgt mit dem Satz von Hahn-Banach für lineare Funktionale die Behauptung. Es gilt für $y \in Y$ und $\alpha \neq 0$, dass $\operatorname{dist}(x_0, Y) \leq \left\|x_0 - \frac{-y}{\alpha}\right\|_X$ und somit folgt

$$|y'_0(y + \alpha x_0)| \leq |\alpha| \cdot \left\|x_0 - \frac{-y}{\alpha}\right\|_X = \|\alpha x_0 + y\|_X.$$

Also haben wir $y'_0 \in Y'_0$ mit $\|y'_0\|_{Y'_0} \leq 1$.
Da Y abgeschlossen ist, gilt $\operatorname{dist}(x_0, Y) > 0$, somit existiert dann auch für alle $\varepsilon > 0$ ein $y_\varepsilon \in Y$, sodass $\|x_0 - y_\varepsilon\|_X \leq (1 + \varepsilon) \cdot \operatorname{dist}(x_0, Y)$. Insgesamt folgt

$$y'_0(x_0 - y_\varepsilon) = \operatorname{dist}(x_0, Y) \geq \frac{1}{1 + \varepsilon} \|x_0 - y_\varepsilon\|_X$$

und damit wegen $x_0 - y_\varepsilon \neq 0$ außerdem

$$\|y_0'\|_{Y_0'} \geq \frac{1}{1+\varepsilon}.$$

Und für $\varepsilon \to 0$ erhalten wir $\|y_0'\|_{Y_0'} \geq 1$. □

Bemerkung 21. *Satz 3.1.3 kann als Verallgemeinerung des Projektionssatzes für Hilberträume aufgefasst werden. Ist nämlich X ein Hilbertraum, so definiere*

$$x'(x) := \left\langle x, \frac{(\mathrm{Id} - P)x_0}{\|(\mathrm{Id} - P)x_0\|} \right\rangle,$$

wobei P die orthogonale Projektion auf Y sei. Dann gilt nach dem Projektionssatz:

$$x' = 0 \text{ auf } Y \text{ und } x'(x_0) = x'(x_0 - Px_0) = \|(\mathrm{Id} - P)x_0\|$$

und außerdem ist $|x'(x)| \leq \|x\|_X$. Also hat x' die Eigenschaften aus Satz 3.1.3.

Korollar 3.1.4. *Sei X ein normierter Raum und sei $x_0 \in X$, dann gilt Folgendes:*

1. *Für alle $x_0 \neq 0$ existiert ein $x_0' \in X'$ mit $\|x_0'\|_{X'} = 1$ und $x_0'(x_0) = \|x_0\|_X$.*
2. *Ist $x'(x_0) = 0$ für alle $x' \in X'$, dann ist $x_0 = 0$.*
3. *Sei $J_X x_0(x') := x'(x_0)$ für alle $x' \in X'$. Dann ist $J_X x_0 \in X''$ mit $\|J_X x_0\| = \|x_0\|_X$, wobei X'' den Bidualraum beschreibt.*

Beweis.

1. Folgt direkt aus dem Satz 3.1.3 mit $Y = \{0\}$.
2. Dies folgt dann direkt aus 1.
3. Nun gilt $|J_X x_0(x')| = |x'(x_0)| \leq \|x'\|_{X'} \cdot \|x_0\|_X$ und falls $x_0 \neq 0$ ist, gilt $|J_X x_0(x_0')| = |x_0'(x_0)| = \|x_0\|_X$ mit x_0' wie in 1.. Daraus folgt dann $\|J_X x_0\| \geq \|x_0\|_X$, also $\|J_X x_0\| = \|x_0\|_X$.

□

Theorem 3.1.5 (Trennungssatz)**.** *Sei X ein normierter Raum und M eine nicht leere, abgeschlossene und konvexe Teilmenge von X und $x_0 \in X \backslash M$. Dann existieren ein $x' \in X'$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $Re(x'(x)) \leq \alpha$ für alle $x \in M$ und $Re(x'(x_0)) > \alpha$. Insbesondere ist $x' \neq 0$ und somit $\{x \in X : Re(x'(x)) = \alpha\}$ eine Hyperebene.*

Beweis.

1. Fall: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
   Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $0 \in M^\circ$. Denn anderenfalls wähle $\widetilde{x} \in M$ und ersetze x_0 durch $\widetilde{x_0} := x_0 - \widetilde{x}$ und M durch $\widetilde{M} := B_r(M - \widetilde{x})$ mit $0 < r < \operatorname{dist}(x_0, M)$. Ist der Satz dann für $\widetilde{M}$ und $\widetilde{x_0}$ mit x' und $\widetilde{\alpha}$ bewiesen, so folgt dieser Satz auch für M und x_0 mit x' und $\alpha := \widetilde{\alpha} + x'(\widetilde{x})$.

   Wir betrachten das sogenannte *Minkowski-Funktional* (verallgemeinerter Abstand)

$$p(x) := \inf\left\{ r > 0 \text{ mit } \frac{x}{r} \in M \right\}$$

für alle $x \in X$. Da nun $0 \in M^\circ$ ist, gilt auch $0 \leq p(x) < \infty$ für alle $x \in X$ und außerdem ist $p \leq 1$ auf M, $p(x_0) > 1$ und $p(0) = 0$. Somit ist für alle $x, y \in X$ und alle $a \geq 0$:

$$\begin{gathered} p(ax) = a\,p(x), \\ p(x+y) \leq p(x) + p(y), \end{gathered}$$

das heißt, p ist sublinear, denn es gilt für $r > 0$:

$$\frac{x}{r} \in M \;\Leftrightarrow\; \frac{ax}{ar} \in M$$

und wegen der Konvexität von M erhalten wir dann für $\frac{y}{s}, \frac{x}{r} \in M$:

$$\frac{x+y}{r+s} = \frac{x}{r+s} + \frac{y}{r+s} = \frac{r}{r+s} \cdot \frac{x}{r} + \frac{s}{r+s} \cdot \frac{y}{s} \in M.$$

Wir definieren $f : \operatorname{span}\{x_0\} \to \mathbb{R}$ durch

$$ax_0 \mapsto a\,p(x_0).$$

Dadurch haben wir dann für alle $a \geq 0$:

$$f(ax_0) = p(ax_0).$$

Und für alle $a \leq 0$:

$$f(ax_0) = a\,p(x_0) \leq 0 \leq p(ax_0).$$

Daher existiert nach Theorem 3.1.1 (angewandt auf den Unterraum $\operatorname{span}\{x_0\}$) eine lineare Fortsetzung F von f auf X mit $F \leq p$. Dann folgt

$$\begin{gathered} F \leq p \leq 1 \text{ auf } M, \\ F(x_0) = f(x_0) = p(x_0) > 1. \end{gathered}$$

Da nun $\overline{B_\varrho(0)} \subseteq M$ für ein $\varrho > 0$ ist, gilt

$$x \in X \;\Rightarrow\; \frac{x}{\frac{1}{\varrho}\|x\|} \in M \;\Rightarrow\; p(x) \leq \frac{1}{\varrho}\|x\| \;\Rightarrow\; F(x) \leq \frac{1}{\varrho}\|x\|.$$

Somit gilt dann auch $-F(x) = F(-x) \leq \frac{1}{\varrho}\|x\|$, und damit folgt $F \in X'$. Und damit haben wir dieses Theorem für $x' = F$ und $\alpha = 1$ gezeigt.

2. Fall: $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
Fasse X als $\mathbb{R}$-Vektorraum $X_\mathbb{R}$ auf und erhalte ein $F_\mathbb{R} \in X'_\mathbb{R}$ mit den gewünschten Eigenschaften.
Wie im Beweis von Satz 3.1.2 gehe dann zur Funktion $F(x) := F_\mathbb{R}(x) - i \cdot F_\mathbb{R}(ix)$ über und erhalte so die Aussage des zu beweisenden Theorems.

□

Bemerkung 22. *Für nicht konvexe Mengen gibt es im Allgemeinen keine entsprechende Aussage.*

Theorem 3.1.6 (Bairescher Kategoriensatz)**.** *Sei X ein nichtleerer vollständiger metrischer Raum und $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ mit abgeschlossenen Mengen $A_k \subseteq X$. Dann gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $(A_{k_0})^\circ \neq \emptyset$.*

Beweis. Angenommen $(A_k)^\circ = \emptyset$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann ist $X \setminus A_k$ nicht leer und offen. Ebenso ist für alle nicht leere und offene Mengen $U \subseteq X$ die Menge $U \setminus A_k = U \cap (X \setminus A_k)$ nichtleer und offen. Also existiert für alle $k \in \mathbb{N}$ ein $\overline{B_\varepsilon(x)} \subseteq U \setminus A_k$ mit $\varepsilon \leq \frac{1}{k}$.
Daher wählen wir induktiv Kugeln $B_{\varepsilon_k}(x_k)$ mit $\overline{B_{\varepsilon_k}(x_k)} \subseteq B_{\varepsilon_{k-1}}(x_{k-1}) \setminus A_k$ und $\varepsilon_k \leq \frac{1}{k}$.
Da wir nun $x_l \in B_{\varepsilon_k}(x_k)$ für $l \geq k$ und $\varepsilon_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$ haben, ist die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Also existiert ein Grenzwert $x := \lim_{k\to\infty} x_k \in X$ und für alle k ist $x \in \overline{B_{\varepsilon_k}(x_k)}$.
Da nun aber $\overline{B_{\varepsilon_k}(x_k)} \cap A_k = \emptyset$ gilt, folgt $x \notin \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = X$, also ein Widerspruch. □

Theorem 3.1.7 (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit)**.** *Sei X ein nichtleerer vollständiger metrischer Raum und Y sei ein normierter Raum. Sei weiter $\mathcal{F} \subseteq C^0(X, Y)$ mit $\sup_{f\in\mathcal{F}} \|f(x)\|_Y < \infty$ für jedes $x \in X$. Dann existiert ein $x_0 \in X$ und ein $\varepsilon_0 > 0$, sodass*

$$\sup_{x\in\overline{B_{\varepsilon_0}(x_0)}} \sup_{f\in\mathcal{F}} \|f(x)\|_Y < \infty$$

gilt.

Beweis. Für $f \in \mathcal{F}$ und $k \in \mathbb{N}$ ist $\{x \in X : \|f(x)\|_Y \leq k\}$ eine abgeschlossene Menge. Also ist der Schnitt

$$A_k := \bigcap_{f\in\mathcal{F}} \{x \in X : \|f(x)\|_Y \leq k\}$$

ebenfalls abgeschlossen mit $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = X$.
Nach Theorem 3.1.6 ist $\mathring{A}_{k_0} \neq \emptyset$ für ein k_0. Also existiert

$$\overline{B_{\varepsilon_0}(x_0)} \subseteq A_{k_0}.$$

Mit $\sup_{x\in A_{k_0}} \sup_{f\in\mathcal{F}} \|f(x)\|_Y \leq k_0$ folgt dann die Behauptung. □

Theorem 3.1.8 (Satz von Banach-Steinhaus)**.** *Sei X ein Banachraum, Y ein normierter Raum und $\mathcal{T} \subseteq \mathrm{Lin}(X, Y)$ mit $\sup_{T\in\mathcal{T}} \|Tx\|_Y < \infty$ für jedes $x \in X$. Dann ist $\mathcal{T}$ eine beschränkte Menge in $\mathrm{Lin}(X, Y)$, das heißt*

$$\sup_{T\in\mathcal{T}} \|T\|_{\mathrm{Lin}(X,Y)} < \infty.$$

Beweis. Durch $f_T(x) := \|Tx\|_Y$ für $T \in \mathcal{T}$, $x \in X$ sind Funktionen $f_T \in C^0(X, \mathbb{R})$ definiert. Und die Menge $\mathcal{F} := \{f_T : T \in \mathcal{T}\}$ hat die Eigenschaften aus Theorem 3.1.7. Daher existiert ein $x_0 \in X$, ein $\varepsilon_0 > 0$ und eine Konstante $c < \infty$, sodass

$$\|Tx\|_Y \leq c$$

für $T \in \mathcal{T}$ und $\|x - x_0\|_X \leq \varepsilon_0$ gilt. Daraus folgt dann für alle $T \in \mathcal{T}$ und für alle $x \neq 0$:

$$\|Tx\|_Y = \frac{\|x\|_X}{\varepsilon_0} \cdot \left\| T\left(x_0 + \varepsilon_0 \frac{x}{\|x\|_X}\right) - T(x_0) \right\|_Y \leq \frac{2c}{\varepsilon_0} \|x\|_X.$$

Und damit gilt für alle $T \in \mathcal{T}$:

$$\|T\|_{\text{Lin(X,Y)}} \leq \frac{2c}{\varepsilon_0}.$$

□

Satz 3.1.9. *Sei X ein Banachraum, Y ein normierter Raum und $\mathcal{T} \subseteq \text{Lin}(X,Y)$ mit der Eigenschaft, dass für alle $x \in X$ und für alle $y' \in Y'$ gilt: $\sup_{T\in\mathcal{T}}|y'(Tx)| < \infty$. Dann ist $\mathcal{T}$ eine beschränkte Menge in $\text{Lin}(X,Y)$.*

Beweis. Für $x \in X$ und für $T \in \mathcal{T}$ ist nach Korollar 3.1.4 3. durch $J_Y Tx(y') = y'(Tx)$ für alle $y' \in Y'$ ein Element aus $(Y')' = \text{Lin}(Y', \mathbb{K})$ definiert mit $\|J_Y Tx\|_{(Y')'} = \|Tx\|_Y$.
Nach Voraussetzung ist $\sup_{T\in\mathcal{T}}|J_Y Tx(y')| < \infty$ für alle $y' \in Y'$.
Da Y' ein Banachraum ist, kann Theorem 3.1.8 auf die Menge
$\{J_Y Tx \in \text{Lin}(Y', \mathbb{K}),\ T \in \mathcal{T}\}$ angewendet werden und liefert uns für alle $x \in X$

$$\sup_{T\in\mathcal{T}}\|Tx\|_Y = \sup_{T\in\mathcal{T}}\|J_Y Tx\|_{(Y')'} < \infty.$$

Dann erfüllt $\mathcal{T}$ die Voraussetzungen von Theorem 3.1.8 und daher liefert Theorem 3.1.8 die Behauptung. □

Definition 3.1.1 (Offene Abbildung)**.** *Seien X, Y zwei metrische Räume. Dann heißt die Abbildung $f : X \to Y$* offen, *falls gilt:*

$$U \text{ offen in } X \quad \Rightarrow \quad f(U) \text{ offen in } Y.$$

Bemerkung 23. *Ist f bijektiv, so ist f genau dann offen, wenn f^{-1} stetig ist.
Sind X, Y normierte Räume und ist die Abbildung $T : X \to Y$ linear, dann gilt:*

$$T \text{ ist offen } \Leftrightarrow \exists_{\delta>0} :\ B_\delta(0) \subseteq T(B_1(0)).$$

Denn sei U offen und $x \in U$. Dann wählen wir ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq U$. Wegen der Inklusion $B_\delta(0) \subseteq T(B_1(0))$ folgt

$$B_{\varepsilon\delta}(Tx) \subseteq T(B_\varepsilon(x)) \subseteq T(U) \Rightarrow T(U) \text{ ist offen.}$$

Theorem 3.1.10 (Satz von der offenen Abbildung)**.** *Seien X und Y Banachräume. Dann gilt für jedes $T \in \text{Lin}(X,Y)$*

$$T \text{ ist surjektiv } \Leftrightarrow T \text{ ist offen.}$$

Beweis.

„$\Rightarrow$“ Da hier nun nach Voraussetzung T surjektiv ist gilt

$$Y = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \overline{T(B_k(0))}.$$

Nach Theorem 3.1.6 existiert dann ein $k_0 \in \mathbb{N}$ und ein $B_{\varepsilon_0}(y_0) \subseteq Y$ für die gilt

$$B_{\varepsilon_0}(y_0) \subseteq \overline{T(B_{k_0}(0))}.$$

Daher existieren für alle $y \in B_{\varepsilon_0}(0)$ Punkte $x_i \in B_{k_0}(0)$ mit

$$\lim_{i\to\infty} Tx_i = y_0 + y.$$

Wählen wir $x_0 \in X$ mit $Tx_0 = y_0$, dann haben wir

$$T\left(\frac{x_i - x_0}{k_0 + \|x_0\|}\right) \xrightarrow{i\to\infty} \frac{y}{k_0 + \|x_0\|}$$

und

$$\left\|\frac{x_i - x_0}{k_0 + \|x_0\|}\right\| < 1.$$

Und so erhalten wir die Inklusion $B_\delta(0) \subseteq \overline{T(B_1(0))}$ mit $\delta = \frac{\varepsilon_0}{k_0+\|x_0\|}$ $(*)$.
Wir möchten genau diese Inklusion ohne den Abschluss der Menge auf der rechten Seite zeigen, gegebenfalls mit kleinerem δ.
$(*)$ impliziert, dass für $y \in B_\delta(0)$ ein $x \in B_1(0)$ existiert mit $y - Tx \in B_{\frac{\delta}{2}}(0)$. Folglich gilt

$$2(y - Tx) \in B_\delta(0).$$

Daher wählen wir zu $y \in B_\delta(0)$ induktiv Punkte $y_k \in B_\delta(0)$ und $x_k \in B_1(0)$ mit $y_0 = y$ und $y_{k+1} = 2(y_k - Tx_k)$. Dann haben wir

$$2^{-k-1}y_{k+1} = 2^{-k}y_k - T\left(2^{-k}x_k\right)$$

und daraus folgt dann

$$T\left(\sum_{k=0}^{m} 2^{-k}x_k\right) = y - 2^{-m-1}y_{m+1} \xrightarrow{m\to\infty} y.$$

Wegen

$$\sum_{k=0}^{m}\left\|2^{-k}x_k\right\| < \sum_{k=0}^{m} 2^{-k} \leq 2 < \infty$$

ist

$$\left(\sum_{k=0}^{m} 2^{-k}x_k\right)_{m\in\mathbb{N}}$$

eine Cauchy-Folge in X. Da X vollständig ist, existiert

$$x := \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}x_k$$

in X mit $\|x\| \leq 2$. Wegen der Stetigkeit von T folgt weiter

$$Tx = \lim_{m\to\infty} T\left(\sum_{k=0}^{m} 2^{-k}x_k\right) = y,$$

womit die Inklusion $B_\delta(0) \subseteq T(B_2(0))$ folgt. Dann gilt aber auch $B_{\frac{\delta}{2}}(0) \subseteq T(B_1(0))$ und damit gilt nach der Bemerkung 23, dass T offen ist.

" $\Leftarrow$ " Da für ein $\delta > 0$ die Inklusion $B_\delta(0) \subseteq T(B_1(0))$ gilt, ist $B_R(0) \subseteq T\left(B_{\frac{R}{\delta}}(0)\right)$ für alle $R > 0$ und damit ist T surjektiv.

□

Theorem 3.1.11 (Satz von der inversen Abbildung)**.** *Sind X, Y Banachräume und $T \in \mathrm{Lin}(X, Y)$, dann gilt:*

$$T \text{ ist bijektiv } \Rightarrow T^{-1} \in \mathrm{Lin}(Y, X).$$

Beweis. T^{-1} ist offensichtlich linear. Nach Theorem 3.1.10 ist T offen. Nach der Bemerkung 23 folgt dann auch die Stetigkeit von T^{-1}. □

Theorem 3.1.12 (Satz vom abgeschlossenen Graphen)**.** *Seien X, Y Banachräume und die Abbildung $T : X \to Y$ linear. Dann ist der Graph*

$$\mathrm{graph}(T) := \{(x, Tx) \in X \times Y : x \in X\}$$

genau dann abgeschlossenen in $X \times Y$, wenn $T \in \mathrm{Lin}(X, Y)$.

Beweis.

"$\Leftarrow$" Diese Richtung folgt direkt aus der Stetigkeit von T. Denn aus $x_n \to x$ folgt, da T nach Voraussetzung stetig ist, $Tx_n \to Tx$. Also gilt auch $(x_n, Tx_n) \to (x, Tx) \in \mathrm{graph}(T)$.

"$\Rightarrow$" Wir versehen $X \times Y$ mit der Norm

$$\|(x, y)\| := \|x\| + \|y\|.$$

Dann ist $(X \times Y, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und $Z := \mathrm{graph}(T)$ ist ein abgeschlossener Unterraum von $X \times Y$ und ebenfalls ein Banachraum. Definiere für $(x, y) \in Z$

$$P_X(x, y) := x \text{ und } P_Y(x, y) := y.$$

Dann sind P_X und P_Y linear und stetig. Außerdem ist $P_X : Z \to X$ eine bijektive Abbildung. Nach Theorem 3.1.11 ist $P_X^{-1} \in \mathrm{Lin}(X, Z)$. Daher folgt

$$T = P_Y P_X^{-1} \in \mathrm{Lin}(X, Y).$$

□

Definition 3.1.2 (Projektion auf Y)**.** *Sei X ein Vektorraum und $Y \subseteq X$ ein Untervektorraum. Eine lineare Abbildung $P : X \to X$ heißt* (lineare) Projektion *auf Y falls*

$$P^2 = P \text{ und } \mathfrak{R}(P) = Y$$

gilt.

Lemma 3.1.13.

1. *P ist genau dann eine Projektion auf Y, wenn $(P : X \to Y$ und $P|_Y = \mathrm{Id})$ ist.*
2. *Falls $P : X \to X$ eine Projektion ist, dann gilt $X = \mathrm{Kern}(P) \bigoplus \mathfrak{R}(P)$.*
3. *Falls $P : X \to X$ eine Projektion ist, so ist $(\mathrm{Id} - P)$ ebenfalls eine Projektion mit*
   - $\mathrm{Kern}(\mathrm{Id} - P) = \mathfrak{R}(P)$,
   - $\mathfrak{R}(\mathrm{Id} - P) = \mathrm{Kern}(P)$.

4. Zu jedem Unterraum Y von X existiert eine Projektion auf Y.

Beweis.

1. Dies folgt unmittelbar aus der Definition 3.1.2.

2. Für alle $x \in X$ gilt
$$x = \underbrace{(x - Px)}_{\in \mathrm{Kern}(P)} + \underbrace{Px}_{\in \mathfrak{R}(P)} .$$
Ist nun $x \in \mathrm{Kern}(P) \cap \mathfrak{R}(P)$, dann ist $Px = 0$ und $x = Px$. Also $x = 0$.

3. Dies folgt durch direktes Nachrechnen.

4. Wir definieren
$$M := \{(Z, P) : Y \subseteq Z \subseteq X,\ Z \text{ ist Unterraum},\ P : Z \to Y \text{ linear},\ P|_Y = \mathrm{Id}\},$$
versehen mit derselben Ordnung wie im Beweis des Satzes von Hahn-Banach. Wie dort folgt auch hier mit dem Lemma von Zorn, dass M ein maximales Element $(\tilde{Z}, \tilde{P})$ besitzt. Gäbe es ein $z_0 \in X \setminus \tilde{Z}$, dann ist durch $Z_0 := \mathrm{span}\{z_0\} \bigoplus \tilde{Z}$ und $P_0(z + \alpha z_0) := \tilde{P}(z)$ mit $z \in \tilde{Z}$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ ein $(Z_0, P_0) \in M$ mit $(\tilde{Z}, \tilde{P}) < (Z_0, P_0)$ (d.h. $(\tilde{Z}, \tilde{P}) \leq (Z_0, P_0)$ und $(\tilde{Z}, \tilde{P}) \neq (Z_0, P_0)$) definiert. Womit wir einen Widerspruch hätten.

□

Definition 3.1.3 (Stetige Projektion)**.** *Sei X ein normierter Raum. Dann ist*
$$\mathcal{P}(X) := \left\{P \in \mathrm{Lin}(X) \text{ mit } P^2 = P\right\}$$
die Menge der stetigen Projektionen.

Lemma 3.1.14. *Sei $P \in \mathcal{P}(X)$, dann gilt:*

1. *$\mathrm{Kern}(P)$ und $\mathfrak{R}(P)$ sind abgeschlossen.*
2. *$\|P\| \geq 1$ oder $P = 0$.*

Beweis.

1. Da P stetig ist, ist $\mathrm{Kern}(P) = P^{-1}(0)$ abgeschlossen. Weil nun $(\mathrm{Id} - P)$ stetig ist und nach Lemma 3.1.13 eine Projektion beschreibt, ist auch $\mathfrak{R}(P) = \mathrm{Kern}(\mathrm{Id} - P) = (\mathrm{Id} - P)^{-1}(0)$ abgeschlossen.

2. Es gilt
$$\|P\| = \|P^2\| \leq \|P\|^2$$
und damit folgt offensichtlich $\|P\| \geq 1$ oder $P = 0$.

□

Satz 3.1.15 (Satz vom abgeschlossenen Komplement)**.** *Sei X ein Banachraum, $Y \subseteq X$ ein abgeschlossener Unterraum und $Z \subseteq X$ ein weiterer Unterraum mit $Y \bigoplus Z = X$. Dann ist äquivalent:*

(1) Es gibt eine stetige Projektion P auf Y mit $Z = \mathrm{Kern}(P)$.

(2) Z ist abgeschlossen.

Beweis.

(1) $\Rightarrow$ (2):
Kern(P) ist abgeschlossen.

(2) $\Rightarrow$ (1):
Betrachte den Banachraum $\widetilde{X} := Z \times Y$ mit der Norm $\|(z,y)\|_{\widetilde{X}} := \|z\|_X + \|y|_X$ für $z \in Z$, $y \in Y$ und definiere $T(z,y) := z + y$.
Da $X = Z \bigoplus Y$ gilt, ist die Abbildung $T : \widetilde{X} \to X$ linear und bijektiv. Wir definieren weiter $P_Z : X \to Z$ und $P_Y : X \to Y$ für $x \in X$ durch

$$T^{-1}x = (P_Z x, P_Y x).$$

Dann sind P_Z und P_Y linear. Wegen $T^{-1}(y) = (0, y)$ für alle $y \in Y$, ist $P_Y|_Y = \mathrm{Id}$, also eine Projektion auf Y.
Wegen $\|P_Y x\|_X \leq \|T^{-1}x\|_{\widetilde{X}}$ ist P_Y stetig, falls T^{-1} stetig ist. Wegen $\|T(z,y)\|_X \leq \|(z,y)\|_{\widetilde{X}}$ ist T stetig, sodass mit dem Satz von der inversen Abbildung 3.1.11 die Stetigkeit von T^{-1} folgt.

□

Bemerkung 24. *Ist Y ein abgeschlossener Unterraum eines Hilbertraumes H, dann ist nach dem Projektionssatz die orthogonale Projektion P auf Y eine stetige Projektion auf Y im Sinne der obigen Definition 3.1.3 und $H = Y \bigoplus Y^\perp$ mit $Y, Y^\perp$ abgeschlossen. Wegen der Besselschen Ungleichung ist $\|P\| \leq 1$, und daher wegen Lemma 3.1.14 ist $\|P\| = 1$ oder $P = 0$.*

Satz 3.1.16. *Sei X ein normierter Raum, E ein n-dimensionaler Unterraum mit Basis $\{e_i : i = 1, ..., n\}$ und Y ein abgeschlossener Unterraum mit $Y \cap E = \{0\}$. Dann gilt:*

1. *Es gibt $e'_1, ..., e'_n \in X'$ mit $e'_j\,|_Y = 0$ und $e'_j(e_i) = \delta_{ij}$.*

2. *Es gibt eine stetige Projektion P auf E mit $Y \subseteq \mathrm{Kern}(P)$.*

Beweis.

1. Es sind $Y_j := \mathrm{span}\{e_k : k \neq j\} \bigoplus Y$ abgeschlossene Unterräume und $e_j \notin Y_j$. Nach Satz 3.1.3 gibt es ein $e'_j \in X'$ mit $e'_j\,|_{Y_j} = 0$ und $e'_j(e_j) = 1$.

2. Wir definieren $Px := \sum_{j=1}^n e'_j(x)e_j$. Dann leistet P das Gewünschte.

□

3.2. Kompakte Operatoren und adjungierte Operatoren auf Banachräumen

Theorem 3.2.1 (Jordansche Normalform für kompakte Operatoren). *Sei X ein Banachraum und T ein kompakter Operator auf X. Dann gelten:*

1. *Die Aussagen aus Satz 2.3.12.*
2. *Für $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ ist*
$$1 \leq n_\lambda := \max\left\{n \in \mathbb{N} : \operatorname{Kern}\left((\lambda \operatorname{Id} - T)^{n-1}\right) \neq \operatorname{Kern}\left((\lambda \operatorname{Id} - T)^{n}\right)\right\} < \infty.$$
Die Zahl $n_\lambda \in \mathbb{N}$ heißt Ordnung *von λ.*
3. (Riesz-Zerlegung) *Für $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ gilt*
$$X = \operatorname{Kern}\left((\lambda \operatorname{Id} - T)^{n_\lambda}\right) \bigoplus \mathfrak{R}\left((\lambda \operatorname{Id} - T)^{n_\lambda}\right).$$
Beide Unterräume sind abgeschlossen und T-invariant. Und der sogenannte charakteristische Unterraum $\operatorname{Kern}\left((\lambda \operatorname{Id} - T)^{n_\lambda}\right)$ *ist endlich-dimensional.*
4. *Sei $\lambda \in \sigma_P(T)$, dann gibt es für $n = 1, ..., n_\lambda$ Unterräume $E_n \subset \operatorname{Kern}\left((\lambda \operatorname{Id} - T)^{n}\right) \setminus \operatorname{Kern}\left((\lambda \operatorname{Id} - T)^{n-1}\right)$, sodass*
$$\operatorname{Kern}\left((\lambda \operatorname{Id} - T)^{n_\lambda}\right) = \bigoplus_{k=1}^{n_\lambda} N_k$$
mit $N_k := \bigoplus_{l=0}^{k-1} (\lambda \operatorname{Id} - T)^l (E_k)$ gilt.
5. *Die Unterräume N_k $(k = 1, ..., n_\lambda)$ sind T-invariant und die Dimensionen $d_k := \dim\left((\lambda \operatorname{Id} - T)^l (E_k)\right)$ sind unabhängig von $l \in \{0, ..., k-1\}$.*
6. *Sind $\{e_{k,j} : j = 1, ..., d_k\}$ Basen von E_k, so ist $\left\{(\lambda \operatorname{Id} - T)^l e_{k,j} : 0 \leq l < k \leq n_\lambda, 1 \leq j \leq d_k\right\}$ eine Basis von $\operatorname{Kern}\left((\lambda \operatorname{Id} - T)^{n_\lambda}\right)$ und mit*
$$x = \sum_{k,j,l} \alpha_{k,j,l} (\lambda \operatorname{Id} - T)^l e_{k,j}$$
$$\text{und } y = \sum_{k,j,l} \beta_{k,j,l} (\lambda \operatorname{Id} - T)^l e_{k,j}$$
ist $Tx = y$ äquivalent zu
$$\begin{pmatrix} \beta_{k,j,k-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_{k,j,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{k,j,k-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha_{k,j,0} \end{pmatrix}.$$

Beweis.

1. Siehe Beweis Satz 2.3.12.

2. Bekanntlich gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\operatorname{Kern}\left((\lambda \operatorname{Id} - T)^{n-1}\right) \subseteq \operatorname{Kern}\left((\lambda \operatorname{Id} - T)^{n}\right).$$

Wir nehmen für alle $n \geq 1$ zunächst an, dass $\operatorname{Kern}\left((\lambda \operatorname{Id} - T)^{n-1}\right) \subsetneq \operatorname{Kern}\left((\lambda \operatorname{Id} - T)^{n}\right)$ sei.
Wähle analog zum Beweis von Satz 2.3.12 mit Hilfe des Lemmas von Riesz ein $x_n \in \operatorname{Kern}\left((\lambda \operatorname{Id} - T)^{n}\right)$ mit $\|x_n\| = 1$ und $\operatorname{dist}\left(x_n, \operatorname{Kern}\left((\lambda \operatorname{Id} - T)^{n-1}\right)\right) \geq \frac{1}{2}$ $(*)$.
Dann erhalten wir für all $m < n$

$$(\lambda \operatorname{Id} - T)\, x_n + \lambda x_m - (\lambda \operatorname{Id} - T)\, x_m \in \operatorname{Kern}\left((\lambda \operatorname{Id} - T)^{n-1}\right)$$

und mit $(*)$ folgt dann

$$\|Tx_n - Tx_m\| = \|\lambda x_n - ((\lambda \operatorname{Id} - T)\, x_n + \lambda x_m - (\lambda \operatorname{Id} - T)\, x_m)\| \geq \frac{|\lambda|}{2} > 0.$$

Andererseits ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge. Hier ist der Widerspruch zur Kompaktheit von T. Also existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit
$\operatorname{Kern}\left((\lambda \operatorname{Id} - T)^{n-1}\right) = \operatorname{Kern}\left((\lambda \operatorname{Id} - T)^{n}\right)$. Und somit folgt für alle $m > n$

$$x \in \operatorname{Kern}\left((\lambda \operatorname{Id} - T)^{m}\right) \Rightarrow (\lambda \operatorname{Id} - T)^{m-n} x \in \operatorname{Kern}\left((\lambda \operatorname{Id} - T)^{n}\right) = \operatorname{Kern}\left((\lambda \operatorname{Id} - T)^{n-1}\right)$$

Damit ist $(\lambda \operatorname{Id} - T)^{n-1+m-n} x = 0$ und $x \in \operatorname{Kern}\left((\lambda \operatorname{Id} - T)^{m-1}\right)$, also

$$\operatorname{Kern}\left((\lambda \operatorname{Id} - T)^{m}\right) = \operatorname{Kern}\left((\lambda \operatorname{Id} - T)^{m-1}\right).$$

Induktiv folgt dann für alle $m \geq n$:

$$\operatorname{Kern}\left((\lambda \operatorname{Id} - T)^{m}\right) = \operatorname{Kern}\left((\lambda \operatorname{Id} - T)^{n}\right).$$

Also ist n_λ endlich. Und wegen $\operatorname{Kern}(\lambda \operatorname{Id} - T) \neq \{0\}$ ist $n_\lambda \geq 1$.

3. Es gilt $\operatorname{Kern}\left((\lambda \operatorname{Id} - T)^{n_\lambda}\right) \bigoplus \mathfrak{R}\left((\lambda - T)^{n_\lambda}\right) \subseteq X$, denn für $x \in \operatorname{Kern}\left((\lambda \operatorname{Id} - T)^{n_\lambda}\right) \cap \mathfrak{R}\left((\lambda \operatorname{Id} - T)^{n_\lambda}\right)$ gilt $(\lambda \operatorname{Id} - T)^{n_\lambda} x = 0$ und $x = (\lambda \operatorname{Id} - T)^{n_\lambda} y$ für ein $y \in X$. Daraus folgt dann

$$(\lambda \operatorname{Id} - T)^{2n_\lambda} y = 0,$$

also

$$y \in \operatorname{Kern}\left((\lambda \operatorname{Id} - T)^{2n_\lambda}\right).$$

Unter Ausnutzung von 2. erhalten wir

$$y \in \operatorname{Kern}\left((\lambda \operatorname{Id} - T)^{n_\lambda}\right),$$

also

$$x = (\lambda \operatorname{Id} - T)^{n_\lambda} y = 0.$$

Weiterhin hat $(\lambda \operatorname{Id} - T)^{n_\lambda}$ die Gestalt:

$$(\lambda \operatorname{Id} - T)^{n_\lambda} = \lambda^{n_\lambda} \operatorname{Id} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n_\lambda} \binom{n_\lambda}{k} \lambda^{n_\lambda - k} (-T)^k}_{\in K(X) \text{ nach Satz 2.3.5}}.$$

<u>Zeige als Zwischenschritt:</u>
Sei $\widetilde{T} \in K(X)$ und $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$, dann gilt:

$$\operatorname{codim}\left(\mathfrak{R}\left(\lambda - \widetilde{T}\right)\right) \leq \dim\left(\operatorname{Kern}\left(\lambda - \widetilde{T}\right)\right)$$

Dabei ist in X die $\operatorname{codim}(Y) = \dim(Z)$ für Z mit $X = Y \bigoplus Z$.

<u>Anmerkung:</u> Wir werden später sehen, dass sogar "=" in der obigen Ungleichung gilt.

Beweis des Zwischenschritts. Nach Satz 2.3.6 ist $n := \dim\left(\operatorname{Kern}\left(\lambda - \widetilde{T}\right)\right)$ endlich. Außerdem können wir ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit $\lambda = 1$ annehmen. Sei $\{x_1, ..., x_n\}$ eine Basis von $\operatorname{Kern}\left(1 - \widetilde{T}\right)$. Wäre die obige Ungleichung falsch, dann gäbe es linear unabhängige Vektoren $y_1, ..., y_n$, sodass
$\operatorname{span}\{y_1, ..., y_n\} \bigoplus \mathfrak{R}(1 - \widetilde{T}) \subsetneq X$.
Nach Satz 3.1.16 (beachte, dass nach Satz 2.3.6 $\mathfrak{R}(1 - \widetilde{T})$ abgeschlossen ist) gibt es $x_1', ..., x_n' \in X'$ mit

$$x_k'(x_l) = \delta_{k,l}$$

für alle $k, l = 1, ..., n$. Weiter definieren wir

$$\widetilde{\widetilde{T}}x := \widetilde{T}x + \sum_{k=1}^{n} x_k'(x) y_k.$$

Damit ist dann $\widetilde{\widetilde{T}} \in K(X)$, weil $\widetilde{T} \in K(X)$ und $\mathfrak{R}\left(\widetilde{\widetilde{T}} - \widetilde{T}\right)$ endliche Dimension hat. Außerdem gilt

$$\operatorname{Kern}\left(1 - \widetilde{\widetilde{T}}\right) = \{0\},$$

denn aus $\left(1 - \widetilde{\widetilde{T}}\right)x = 0$ folgt nach Wahl der y_k zunächst $\left(1 - \widetilde{T}\right)x = 0$ und $x_k'(x) = 0$ für alle $k = 1, ..., n$. Wegen $x \in \operatorname{Kern}\left(1 - \widetilde{T}\right)$ existiert die Darstellung

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k.$$

Folglich gilt für alle $l = 1, ..., n$

$$0 = x_l'(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_l'(x_k) = \alpha_l.$$

Also $x = 0$.
Nach Satz 2.3.6 gilt: $1 - \widetilde{\widetilde{T}}$ ist injektiv genau dann, wenn $1 - \widetilde{\widetilde{T}}$ surjektiv ist. Somit ist $\mathfrak{R}\left(1 - \widetilde{\widetilde{T}}\right) = X$.

Wegen $\left(1-\tilde{\tilde{T}}\right)x_l = -y_l$ für $l = 1, ..., n$ und $\left(1-\tilde{\tilde{T}}\right)(x - \sum_{l=1}^n x_l'(x)x_l) = \left(1-\tilde{T}\right)x$ für alle $x \in X$ ist

$$X = \mathfrak{R}\left(1-\tilde{\tilde{T}}\right) \subseteq \operatorname{span}\{y_1, ..., y_n\} \bigoplus \mathfrak{R}\left(1-\tilde{T}\right).$$

ein Widerspruch! Also ist der Zwischenschritt bewiesen. □

Wegen $\operatorname{codim}(\mathfrak{R}(\lambda - T)^{n_\lambda}) \leq \dim(\operatorname{Kern}((\lambda - T)^{n_\lambda})) < \infty$ folgt

$$X = \operatorname{Kern}((\lambda - T)^{n_\lambda}) \bigoplus \mathfrak{R}((\lambda - T)^{n_\lambda})$$

wobei beide Unterräume abgeschlossen sind.
Da T mit $(\lambda - T)$ vertauschbar ist, das heißt $T(\lambda - T) = (\lambda - T)T$, ist T auch mit $(\lambda - T)^{n_\lambda}$ vertauschbar. Daher sind beide Unterräume T-invariant.

4. , 5. und 6. zeigt man wie beim Beweis der Jordanschen Normalform in der Linearen Algebra beziehungsweise Algebra.

□

Korollar 3.2.2. *In der Situation von Theorem 3.2.1 gilt außerdem:*

1. *Für $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ ist $\sigma\left(T|_{\mathfrak{R}((\lambda-T)^{n_\lambda})}\right) = \sigma(T) \setminus \{\lambda\}$.*
2. *Ist P_λ für $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ die (stetige) Projektion auf* $\operatorname{Kern}((\lambda - T)^{n_\lambda})$ *gemäß der Zerlegung aus Theorem 3.2.1 3., dann gilt für alle $\lambda, \mu \in \sigma(T) \setminus \{0\}$:*

$$P_\lambda P_\mu = \delta_{\lambda\mu} P_\lambda.$$

Beweis.

1. Sei T_λ die Einschränkung von T auf $\mathfrak{R}((\lambda - T)^{n_\lambda})$. Dann ist $T_\lambda \in K(\mathfrak{R}((\lambda - T)^{n_\lambda}))$, wobei $\mathfrak{R}((\lambda - T)^{n_\lambda})$ nach Satz 2.3.6 2. ein abgeschlossener Unterraum und somit ein Banachraum ist. Hierbei wurde ausgenutzt, dass T und $(\lambda - T)^{n_\lambda}$ kommutieren. Außerdem gilt

$$\operatorname{Kern}(\lambda - T_\lambda) = \operatorname{Kern}(\lambda - T) \cap \mathfrak{R}((\lambda - T)^{n_\lambda}) = \{0\}.$$

Daher folgt mit Satz 2.3.6 3., angewandt auf T_λ, dass $\mathfrak{R}(\lambda - T_\lambda) = \mathfrak{R}((\lambda - T)^{n_\lambda})$ ist. Somit ist $\lambda \in \varrho(T_\lambda)$ ist. Es bleibt noch zu zeigen, dass

$$\sigma(T_\lambda)\backslash\{\lambda\} = \sigma(T)\backslash\{\lambda\}.$$

Sei $\mu \in \mathbb{C}\backslash\{\lambda\}$. Nach Theorem 3.2.1 3. ist der Kern von $(\lambda - T)^{n_\lambda}$ invariant unter $\mu - T$. Außerdem ist $\mu - T$ auf diesem Unterraum injektiv. Denn $x \in \operatorname{Kern}(\mu - T)$ bedeutet $(\lambda - \mu)x = (\lambda - T)x$. Gilt dann zusätzlich $(\lambda - T)^m x = 0$ für ein $m \geq 1$, so folgt

$$(\lambda - \mu)(\lambda - T)^{m-1}x = (\lambda - T)^m x = 0.$$

Wegen $\lambda \neq \mu$ muss $(\lambda - T)^{m-1}x = 0$ sein. Daraus ergibt sich induktiv, dass $x = 0$ ist. Damit ist gezeigt, dass

$$\operatorname{Kern}(\mu - T) \cap \operatorname{Kern}((\lambda - T)^m) = \{0\}$$

für alle $m \geq 1$ gilt. Für $m = n_\lambda$ bedeutet dies die Injektivität von $\mu - T$ auf $\operatorname{Kern}((\lambda - T)^{n_\lambda})$. Da dieser Raum endlich-dimensional ist, muss $\mu - T$ auch bijektiv auf $\operatorname{Kern}((\lambda - T)^{n_\lambda})$ sein. Das heißt aber, dass $\mu \in \varrho(T)$ genau dann gilt, wenn $\mu \in \varrho(T_\lambda)$ ist.

2. Es seien $\lambda, \mu \in \sigma(T)\backslash\{0\}$ verschieden und $A_\lambda = \lambda - T$ sowie $A_\mu = \mu - T$. Nun hat jedes $x \in$ Kern $(A_\mu^{n_\mu})$ gemäß der Riesz-Zerlegung von X in Kern $(A_\lambda^{n_\lambda}) \bigoplus \mathfrak{R}(A_\lambda^{n_\lambda})$ eine Darstellung $x = z + y$. Da beide Unterräume invariant unter T, also auch unter A_μ sind, folgt

$$0 = A_\mu^{n_\mu} x = A_\mu^{n_\mu} z + A_\mu^{n_\mu} y$$

mit $A_\mu^{n_\mu} z \in$ Kern $(A_\lambda^{n_\lambda})$ und $A_\mu^{n_\mu} y \in \mathfrak{R}(A_\lambda^{n_\lambda})$ und daher $0 = A_\mu^{n_\mu} z$. Da wie oben gezeigt A_μ auf Kern $(A_\lambda^{n_\lambda})$ bijektiv ist und damit auch $A_\mu^{n_\mu}$, folgt $z = 0$, das heißt $x \in \mathfrak{R}(A_\lambda^{n_\lambda})$. Wir haben somit gezeigt, dass

$$\text{Kern } (A_\mu^{n_\mu}) \subseteq \mathfrak{R}(A_\lambda^{n_\lambda}),$$

also

$$\mathfrak{R}(P_\mu) \subseteq \text{Kern } P_\lambda$$

und damit $P_\lambda P_\mu = 0$ gilt.

□

Korollar 3.2.3. *Ist $T \in K(X)$, wobei X ein Banachraum und $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ sei, dann hat die Resolventenfunktion $\mu \mapsto R(\mu, T)$ in λ einen (isolierten) Pol der Ordnung n_λ. Das heißt,*

$$\mu \mapsto (\mu - \lambda)^{n_\lambda} R(\mu, T)$$

kann in λ holomorph fortgesetzt werden und der Wert in λ ist ungleich Null.

Beweis. Betrachte die Zerlegung

$$X = \underbrace{\text{Kern}\left((\lambda - T)^{n_\lambda}\right)}_{=\mathfrak{R}(P_\lambda)} \bigoplus \underbrace{\mathfrak{R}\left((\lambda - T)^{n_\lambda}\right)}_{=\text{Kern}(P_\lambda)}$$

und $T_0 := T|_{\mathfrak{R}(P_\lambda)}$, $T_1 := T|_{\text{Kern}(P_\lambda)}$.
Da λ ein isolierter Punkt von $\sigma(T)$ ist, existiert ein $r > 0$ mit $B_r(\lambda) \setminus \{\lambda\} \subseteq \varrho(T)$. Daraus folgt

$$B_r(\lambda) \setminus \{\lambda\} \subseteq \varrho(T_0).$$

Mit Korollar 3.2.2 1. gilt für alle $0 < |\mu| < r$

$$R(\lambda + \mu, T) = R(\lambda + \mu, T_0) P_\lambda + R(\lambda + \mu, T_1)(\text{Id} - P_\lambda).$$

Nun ist nach Satz 2.3.9 $R(\lambda + \mu, T_1)$ holomorph in $B_r(0)$.
Betrachte

$$S(\mu) = \sum_{k=1}^{n_\lambda} \mu^{-k} (T_0 - \lambda)^{k-1}$$

für $\mu \neq 0$. Dann folgt

$$\begin{aligned} S(\mu)\left((\lambda + \mu) - T_0\right) &= \sum_{k=1}^{n_\lambda} \mu^{-(k-1)} (T_0 - \lambda)^{k-1} - \sum_{k=1}^{n_\lambda} \mu^{-k} (T_0 - \lambda)^k \\ &= \text{Id} - \mu^{-n_\lambda} (T_0 - \lambda)^{n_\lambda} = \text{Id}. \end{aligned}$$

Ebenso ist $\left((\lambda + \mu) - T_0\right) S(\mu) = \text{Id}$. Daraus folgt dann

$$R(\lambda + \mu, T_0) = S(\mu)$$

und damit die Behauptung. □

Definition 3.2.1 (Adjungierter Operator)**.** *Seien* X, Y *normierte Räume und* $T \in \mathrm{Lin}(X, Y)$. *Dann heißt der durch*

$$T'y'(x) = y'(Tx)$$

für alle $y' \in Y'$ *und für alle* $x \in X$ *definierte Operator* $T' : Y' \to X'$ *der* adjungierte Operator *oder die* Adjungierte *zu* T.

Satz 3.2.4.

1. $T \to T'$ *ist eine lineare Isometrie von* $\mathrm{Lin}(X, Y)$ *nach* $\mathrm{Lin}(Y', X')$.
2. *Für alle* $T_1 \in \mathrm{Lin}(X, Y)$ *und für alle* $T_2 \in \mathrm{Lin}(Y, Z)$ *gilt* $(T_2 T_1)' = T_1' T_2'$.
3. *Sei* $J_X : X \to X''$ *definiert durch* $x \mapsto J_X x$ *mit* $J_X x(x') = x'(x)$ *für alle* $x \in X$. *Und analog* $J_Y : Y \to Y''$. *Dann gilt:*

$$T'' J_X = J_Y T.$$

Beweis.

1. Für $T \in \mathrm{Lin}(X, Y)$ und $y' \in Y'$ ist $y'(Tx)$ linear in x mit

$$|y'(Tx)| \leq \|Tx\|_Y \|y'\|_{Y'} \leq \|T\| \|x\|_X \|y'\|_{Y'}.$$

Also ist durch $T'y'(x) = y'(Tx)$ ein Element $T'y' \in X'$ definiert mit $\|T'y'\|_{X'} \leq \|T\| \|y'\|_{Y'}$.
Außerdem ist $T'y'$ linear in y', also ist $T' \in \mathrm{Lin}(Y', X')$ mit $\|T'\| \leq \|T\|$. Nun gilt für $\|y'\|_{Y'} \leq 1$ und $\|x\|_X \leq 1$

$$\|T'\| \geq \|T'y'\|_{X'} \geq |T'y'(x)| = |y'(Tx)|.$$

Ist $Tx \neq 0$, dann gibt es nach Korollar 3.1.4 1. ein $y' \in Y'$ mit $\|y'\|_{Y'} = 1$ und $y'(Tx) = \|Tx\|_Y$. Somit folgt

$$\|T'\| \geq \|Tx\|_Y$$

und damit

$$\|T'\| \geq \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y = \|T\|.$$

Also ist $\|T'\| = \|T\|$.

2. Es gilt

$$(T_2 T_1)' z'(x) = z'(T_2 T_1 x) = T_2' z'(T_1 x) = T_1' T_2' z'(x).$$

3. Es gilt

$$T'' J_X x(y') = J_X x(T'y') = T'y'(x) = y'(Tx) = J_Y T x(y').$$

□

Bemerkung 25.

1. *Falls* $X = Y = \mathbb{R}^n$ *mit* $T = (a_{i,j})$, *dann gilt* $T' = (a_{i,j})^T = (a_{j,i}) = T^*$.
2. *Falls* $X = Y = \mathbb{C}^n$ *mit* $T = (a_{i,j})$, *dann gilt* $T' = (a_{i,j})^T \neq T^* = (\overline{a_{ij}})^T$.

3. *Falls* $X = Y = L^2([0,1],\mathbb{C})$ *mit* $Tf(\nu) = \int_0^1 \kappa(\xi,\nu) f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$*, dann folgt*

$$T'f(\nu) = \int_0^1 \kappa(\nu,\xi) f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$
$$\textit{und } T^*f(\nu) = \int_0^1 \overline{\kappa(\nu,\xi)} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

4. *Sind* X, Y *Hilberträume und seien* $R_X : X \to X'$, $R_Y : Y \to Y'$ *die Isometrien aus dem Rieszschen Darstellungssatz, das heißt* $R_Y(y_1)(y_2) = \langle y_2, y_1\rangle_Y$ *mit* $y_1 \mapsto R_Y(y_1)$*, dann gilt*
$$T^* = R_X^{-1} T' R_Y.$$
Denn aus $T'R_Y(y_1)(x_1) = \langle Tx_1, y_1\rangle_Y = \langle x_1, T^*y_1\rangle_X$ *folgt* $R_X^{-1}T'R_Y(y_1) = T^*y_1$.

Satz 3.2.5 (Satz von Schauder)**.** *Seien* X, Y *Banachräume und* $T \in \mathrm{Lin}(X,Y)$*, dann gilt:*
$$T \in K(X,Y) \Leftrightarrow T' \in K(Y',X').$$

Beweis.

" ⇒ " Sei $(y_n') \subseteq Y'$ mit $\|y_n'\| \le 1$. Es ist $K := \overline{TB_1(0)} \subseteq Y$ kompakt und $\varphi_n := y_n'|_K \in C^0(K)$. Die Menge $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq C^0(K)$ ist beschränkt und gleichgradig stetig. Denn es gilt:

$$\begin{aligned}\|\varphi_n\|_{C^0(K)} &= \sup_{x\in\overline{B_1(0)}} |\underbrace{y_n'(Tx)}_{T'y_n'(x)}| \\ &= \|T'y_n'\| \\ &\le \|T'\|\|y_n'\| \\ &\le \|T'\| < \infty.\end{aligned}$$

Und weiter

$$\begin{aligned}|\varphi_n(y_1) - \varphi_n(y_2)| &= |y_n'(y_1) - y_n'(y_2)| \\ &\le \underbrace{\|y_n'\|}_{\le 1}\|y_1 - y_2\| \\ &\le \|y_1 - y_2\|.\end{aligned}$$

Nach Arzelà-Ascoli existiert eine konvergente Teilfolge $(\varphi_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Damit folgt dann

$$\begin{aligned}\|T'y_{n_k}' - T'y_{n_l}'\| &= \sup_{x\in\overline{B_1(0)}} |y_{n_k}'(Tx) - y_{n_l}'(Tx)| \\ &= \underbrace{\|\varphi_{n_k} - \varphi_{n_l}\|_{C^0(K)}}_{\xrightarrow{k,l\to\infty} 0}.\end{aligned}$$

Also ist $\left(T'y_{n_k}'\right)_k$ eine Cauchy-Folge und damit auch konvergent.

" ⇐ " Nach dem gerade gezeigten ist $T'' \in K(X'', Y'')$. Nach Satz 3.2.4 3. ist $T = J_Y^{-1}T''J_X$, da ebenfalls nach Satz 3.2.4 3. der Wertebereich von $T''J_X$ im abgeschlossenen Unterraum $\mathfrak{R}(J_Y T)$ enthalten ist. Die Kompaktheit von T folgt dann nach dem Lemma 2.3.5.

$\square$

Satz 3.2.6. *Für Unterräume $Z \subseteq X$ sei der* Annihilator Z^0 *definiert durch*

$$Z^0 := \{x' \in X' \text{ mit } x'(x) = 0 \text{ für alle } x \in Z\}.$$

Dann gilt:

1. *Ist X ein Hilbertraum und R_X wie in Bemerkung 25, dann ist $Z^0 = R_X\left(Z^\perp\right)$.*
2. *Für $T \in \mathrm{Lin}(X,Y)$ gilt $\mathrm{Kern}(T') = \mathfrak{R}(T)^0$.*
3. *Ist Z abgeschlossen mit $\mathrm{codim}(Z) < \infty$, dann gilt $\dim(Z^0) = \mathrm{codim}(Z)$.*

Beweis.

1. Dies folgt direkt aus den entsprechenden Definitionen.
2. Dies folgt direkt aus der Äquivalenz für alle $x \in X$

$$y' \in \mathrm{Kern}(T') \Leftrightarrow 0 = T'y'(x) = y'(Tx).$$

3. Seien $x_1, ..., x_n \in X$ linear unabhängig mit $X = Z \bigoplus \mathrm{span}\{x_1, ..., x_n\}$. Nach Satz 3.1.16 gibt es Funktionale $x_1', ..., x_n' \in X'$ mit $x_j'|_Z = 0$ und $x_j'(x_i) = \delta_{ij}$. Daher sind die $x_j' \in Z^0$ auch linear unabhängig.
   Ist x' irgendein Funktional aus Z^0 und $x = z + \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \in X$ mit $z \in Z$, $\alpha_i \in K$, dann gilt

$$\begin{aligned} x'(x) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i x'(x_i) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \alpha_i x'(x_j)\left(x_j'(x_i)\right) \\ &= \left(\sum_{j=1}^n x'(x_j)x_j'\right)(x). \end{aligned}$$

   Somit folgt

$$Z^0 = \mathrm{span}\{x_1', ..., x_n'\}$$

   und damit ist klar

$$\dim\left(Z^0\right) = n.$$

$\square$

Satz 3.2.7. *Seien X, Y Banachräume und $T \in \mathrm{Lin}(X,Y)$. Dann existiert ein $T^{-1} \in \mathrm{Lin}(Y,X)$ genau dann, wenn $(T')^{-1} \in \mathrm{Lin}(X',Y')$ existiert und es gilt*

$$\left(T^{-1}\right)' = (T')^{-1}.$$

Beweis. Ist T invertierbar, dann gilt nach Satz 3.2.4:

$$\mathrm{Id} = (T^{-1}T)' = T'(T^{-1})' \quad \text{und} \quad \mathrm{Id} = (T^{-1})'T',$$

das heißt $(T')^{-1} = (T^{-1})' \in Lin(X', Y')$.
Nun sei T' invertierbar. Dann ist nach dem eben Gezeigten T'' invertierbar und bildet daher abgeschlossene Mengen wieder in solche ab. Da J_X und J_Y Isometrien sind, folgt aus Satz 3.2.4 3., dass

$$\mathfrak{R}(J_Y T) = \mathfrak{R}(T'' J_X) = T''(\mathfrak{R}(J_X))$$

abgeschlossen in Y'' ist. Also ist auch

$$\mathfrak{R}(T) = J_Y^{-1}(\mathfrak{R}(J_Y T))$$

abgeschlossen. Da T' injektiv ist, folgt aus Satz 3.2.6, dass

$$\{0\} = \text{Kern } (T') = \mathfrak{R}(T)^0$$

gilt. Nach Satz 3.1.3 muss dann $Y = \overline{\mathfrak{R}(T)} = \mathfrak{R}(T)$ sein. Also ist T surjektiv. Da T'' injektiv ist, folgt $\{0\} = \text{Kern } (T'' J_X) = \text{Kern } (J_Y T) = \text{Kern } (T)$, womit auch die Injektivität von T bewiesen ist. Die Stetigkeit von T^{-1} folgt dann nach dem Satz von der inversen Abbildung (Theorem 3.1.11). □

Theorem 3.2.8 (Fredholmsche Alternative)**.** *Sei X ein Banachraum, $T \in K(X)$ und $\lambda \neq 0$. Dann besitzt das Gleichungssystem $Tx - \lambda x = y$ genau dann eine Lösung $x \in X$, falls $x'(y) = 0$ für alle Lösungen $x' \in X'$ der homogenen adjungierten Gleichung $T'x' - \lambda x' = 0$ ist.*
Die dadurch gegebene Anzahl der Nebenbedingungen an y ist dann gleich der Anzahl der linear unabhängiger Lösungen der homogenen Gleichung $Tz - \lambda z = 0$.

Beweis. Die Bedingung $x'(y) = 0$ für alle Lösungen $x' \in X'$ von $T'x' - \lambda x' = 0$ ist nach Satz 3.2.6 2. äquivalent zu $x'(y) = 0$ für alle $x' \in (\mathfrak{R}(T - \lambda))^0$. Da $\mathfrak{R}(T - \lambda)$ auf Grund von Satz 2.3.6 abgeschlossen ist, ist wegen Satz 3.1.3 die obige Bedingung auch äquivalent zu $y \in \mathfrak{R}(T - \lambda)$, also zur Lösbarkeit von $(T - \lambda)x = y$.
Die Aussage über die Anzahl der Nebenbedingungen ergibt sich folgendermaßen. Nach Satz 3.2.4 3. gilt:

$$\text{Kern}\left((\lambda - T)'' J_X\right) = \text{Kern}\left(J_Y(\lambda - T)\right) = \text{Kern}\left((\lambda - T)\right).$$

Da J_X injektiv ist folgt

$$\dim\left(\text{Kern}(\lambda - T)\right) \leq \dim\left(\text{Kern}\left((\lambda - T)''\right)\right). \tag{3.2}$$

Nach Satz 3.2.6 ist außerdem

$$\dim\left(\text{Kern}\left((\lambda - T)'\right)\right) = \dim\left((\mathfrak{R}(\lambda - T))^0\right) = \text{codim}\left(\mathfrak{R}(\lambda - T)\right), \tag{3.3}$$

somit folgt

$$\dim\left(\text{Kern}\left((\lambda - T)''\right)\right) = \text{codim}\left(\mathfrak{R}\left((\lambda - T)'\right)\right). \tag{3.4}$$

Nach dem Zwischenschritt aus dem Beweis von Satz 3.2.1 gilt

$$\text{codim}\left(\mathfrak{R}(\lambda - T)\right) \leq \dim\left(\text{Kern}(\lambda - T)\right). \tag{3.5}$$

Nach Satz 3.2.5 kann dies auch auf $(\lambda - T)'$ angewandt werden, so dass gilt:

$$\text{codim}\left(\mathfrak{R}\left((\lambda - T)'\right)\right) \leq \dim\left(\text{Kern}\left((\lambda - T)'\right)\right). \tag{3.6}$$

Fasst man nun (3.2)-(3.6) zusammen, so ergibt sich

$$\dim\left(\text{Kern}\left((\lambda - T)'\right)\right) = \dim\left(\text{Kern}(\lambda - T)\right) = \text{codim}\left(\mathfrak{R}(\lambda - T)\right),$$

was die Aussage über die Anzahl der Nebenbedingungen an y liefert. □

3.3. Lokal konvexe und schwache Topologien

Um den Einstieg in diesen Abschnitt etwas zu vereinfachen, befinden sich im Anhang alle relevanten Definitionen und Sätze aus der Topologie, die hier benötigt werden.

Sei X ein Vektorraum und $(p_\alpha)_{\alpha\in I}$ mit einer beliebigen Indexmenge I eine Familie von Halbnormen auf X. Für jedes $x \in X$ definiere

$$U_{\varepsilon,H}(x) := \{y \in X : \forall_{\alpha\in H} : p_\alpha(x-y) < \varepsilon\},$$

wobei H eine endliche Teilmenge von I sei. Weiter definieren wir

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(x) &:= \{U_{\varepsilon,H}(x) : \varepsilon > 0,\ H \subseteq I \text{ endlich}\},\\ \mathcal{U}(x) &:= \left\{U \subseteq X : \exists_{V\in\mathcal{V}(x)} : V \subseteq U\right\},\\ \mathcal{T} &:= \left\{\mathcal{O} \subseteq X : \forall_{x\in\mathcal{O}}\,\exists_{V\in\mathcal{V}(x)} : V \subseteq \mathcal{O}\right\}.\end{aligned}$$

Dann erhalten wir:

Satz 3.3.1. *$(X,\mathcal{T})$ ist ein topologischer Raum. Für jedes $x \in X$ ist $\mathcal{U}(x)$ der* Umgebungsfilter *von x und $\mathcal{V}(x)$ die* Umgebungsbasis *von x.*
$\mathcal{T}$ heißt die von $(p_\alpha)_{\alpha\in I}$ induzierte lokal konvexe Topologie *auf X und $(X,\mathcal{T})$ ein* lokal konvexer (topologischer) Raum. *(Lokal konvex deshalb, weil es für jedes $x \in X$ eine Umgebungsbasis aus konvexen Mengen gibt.)*

Beweis. Man prüft direkt nach, dass $\mathcal{U}(x)$ die Axiome eines Umgebungsfilters erfüllt, siehe Satz A.0.2 *a*). Dann folgen die Behauptungen aus Satz A.0.2 *b*). Für nähere Details siehe [3]. ☐

Bemerkung 26. *Der topologische Raum $(X,\mathcal{T})$ ist bereits eindeutig festgelegt durch die Nullumgebungsbasis $\mathcal{V}(0)$, denn es gilt:*

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(x) &= x + \mathcal{V}(0),\\ \mathcal{U}(x) &= x + \mathcal{U}(0).\end{aligned}$$

Beispiel 19. *Sei X ein normierter Raum und X' der Dualraum.*

a) Für alle $x \in X$ ist $(p_{x'})_{x'\in X'} := |x'(x)|$ eine Familie von Halbnormen, welche die sogenannte schwache Topologie *$\sigma(X,X')$ auf X induziert. $\sigma(X,X')$ ist die schwächste Topologie auf X, bezüglich der alle $x' \in X'$ stetig sind.*

b) Für alle $x' \in X'$ ist $(p_x)_{x\in X}$ mit $p_x(x') := |x'(x)|$ eine Familie von Halbnormen auf X', welche die sogenannte schwach* Topologie *$\sigma(X',X)$ auf X' induziert.*

Lemma 3.3.2. *Sei $(X,\mathcal{T})$ ein von der Halbnormfamilie $(p_\alpha)_{\alpha\in I}$ induzierter lokal konvexer topologischer Raum. Dann sind äquivalent:*

(1) $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$.

(2) $x_n - x \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

(3) Für alle $\alpha \in I$ gilt $p_\alpha(x_n - x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Beweis. Der Beweis folgt direkt aus den entsprechenden Definitionen (Übungsaufgabe). ☐

Beispiel 20. *Sei X ein normierter Raum. Dann sind äquivalent:*

(1) $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ *bezüglich der schwachen Topologie* $\sigma(X, X')$.

(2) Für alle $x' \in X'$ *gilt* $|x'(x_n - x)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

(3) Für alle $x' \in X'$ *gilt* $x'(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} x'(x)$.

Man sagt dann, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *für* $n \to \infty$ schwach *gegen* x konvergiert.
Kurzschreibweise: $x_n \rightharpoonup x$ *für* $n \to \infty$.

Des Weiteren sind äquivalent:

(1) $x'_n \xrightarrow{n\to\infty} x'$ *bezüglich der schwach* Topologie* $\sigma(X', X)$.

(2) Für alle $x \in X$ *gilt* $|(x'_n - x')(x)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

(3) Für alle $x \in X$ *gilt* $x'_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} x'(x)$.

Man sagt dann, dass $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *für* $n \to \infty$ schwach* *gegen* x' konvergiert.
Kurzschreibweise: $x'_n \overset{*}{\rightharpoonup} x'$ *für* $n \to \infty$.

Lemma 3.3.3. *Sei* $(X, \mathcal{T})$ *ein von der Halbnormfamilie* $P = (p_\alpha)_{\alpha\in I}$ *induzierter lokal konvexer topologischer Raum. Dann sind äquivalent:*

(1) $(X, \mathcal{T})$ *ist ein Hausdorffraum.*

(2) $\forall_{x\in X\setminus\{0\}} \exists_{p_\alpha\in P} : p_\alpha(x) \neq 0$.

Beweis. Der Beweis folgt direkt aus den entsprechenden Definitionen. Für nähere Details siehe [4]. □

Lemma 3.3.4. *Seien* $(X, \mathcal{T}_P)$ *und* $(Y, \mathcal{T}_Q)$ *von den Halbnormfamilien* $P = (p_\alpha)_{\alpha\in I_X}$ *bzw.* $Q = (q_\beta)_{\beta\in I_Y}$ *induzierte lokal konvexe topologische Räume und sei* $T : X \to Y$ *linear. Dann sind äquivalent:*

(1) T *ist stetig.*

(2) T *ist stetig in* 0.

(3) Für alle $q_\beta \in Q$ *existiert eine endliche Teilmenge* $H \subseteq I_X$ *und ein* $M \geq 0$, *sodass für alle* $x \in X$ *gilt:*

$$q_\beta(Tx) \leq M \cdot \max_{\alpha\in H} p_\alpha(x).$$

Beweis. Der Beweis erfolgt durch Verallgemeinerung des Beweises der entsprechenden Aussagen über stetige lineare Abbildungen in normierten Räumen. Für nähere Details siehe [4]. □

Korollar 3.3.5. *Sei* $(X, \mathcal{T})$ *ein von der Halbnormfamilie* $P = (p_\alpha)_{\alpha\in I}$ *induzierter lokal konvexer topologischer Raum. Eine lineare Abbildung* $T : X \to \mathbb{K}$ *ist genau dann stetig, falls es endlich viele* $p_1, ..., p_n \in P$ *und ein* $M \geq 0$ *gibt, sodass für alle* $x \in X$ *gilt:*

$$|T(x)| \leq M \cdot \max_{i=1,\dots,n} p_i(x).$$

Beweis siehe [4].

Definition 3.3.1 (Dualraum)**.** *Sei* $(X, \mathcal{T})$ *ein lokal konvexer topologischer Raum. Die Menge aller (bezüglich* $\mathcal{T}$*) stetigen linearen Abbildungen* $T : X \to \mathbb{K}$ *nennt man den* Dualraum X' *von* X.

Bemerkung 27. *Es gibt Verallgemeinerungen des Satzes von Hahn-Banach und der Trennungssätze für lokal konvexe Räume. Für nähere Details siehe [4].*

Distributionen

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ eine offene Teilmenge und $\mathcal{D}(\Omega) := C_c^\infty(\Omega)$. Des Weiteren seien Halbnormen $(p_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ definiert durch

$$p_m(\varphi) := \sup_{|\beta|\le m} \|\partial_x^\beta \varphi(x)\|_{C^0(\Omega)}.$$

Sei außerdem $(p_\alpha)_{\alpha\in I}$ die Familie aller Halbnormen, für die Folgendes gilt: für alle kompakte Teilmengen $K \subseteq \Omega$ existieren $C, m \ge 0$, sodass für alle $\varphi \in C_c^\infty(K)$ die Ungleichung

$$p_\alpha(\varphi) \le C\, p_m(\varphi)$$

erfüllt ist. Dann erzeugt $(p_\alpha)_{\alpha\in I}$ eine lokal konvexe Topologie $\mathcal{T}_\mathcal{D}$ auf $\mathcal{D}(\Omega)$.

Dies impliziert, dass $\varphi_n \xrightarrow{n\to\infty} \varphi$ bezüglich $\mathcal{T}_\mathcal{D}$ genau dann gilt, wenn eine kompakte Teilmenge $K \subseteq \Omega$ existiert, sodass $\operatorname{supp}(\varphi_n) \subset K$ und $\operatorname{supp}(\varphi) \subset K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt und zusätzlich $\|\partial_x^\beta \varphi_n\|_{C^0(K)} \xrightarrow{n\to\infty} \|\partial_x^\beta \varphi\|_{C^0(K)}$ für alle $\beta \in \mathbb{N}_0^d$ erfüllt ist.

Sei $\mathcal{D}'(\Omega)$ der Dualraum von $(\mathcal{D}(\Omega), \mathcal{T}_\mathcal{D})$. Dann heißen die Elemente von $\mathcal{D}'(\Omega)$ *Distributionen* auf Ω. Analog zum Fall von normierten Räumen nennt man die von der Halbnormfamilie $(p_\varphi)_{\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)}$ mit

$$p_\varphi(T) := |T(\varphi)|$$

für alle $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ auf $\mathcal{D}'(\Omega)$ induzierte lokal konvexe Topologie, die schwach* Topologie $\sigma\left(\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)\right)$.

Somit konvergiert T_n für $n \to \infty$ bezüglich der schwach* Topologie $\sigma\left(\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)\right)$ genau dann gegen T, wenn $T_n(\varphi)$ für $n \to \infty$ gegen $T(\varphi)$ konvergiert für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Außerdem gilt:

Lemma 3.3.6. *Seien Ω und $(p_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ wie oben. Dann gilt:*

a) Ist $K \subseteq \Omega$ kompakt und $\mathcal{D}_K(\Omega) := C_c^\infty(K)$, so stimmen die von $(p_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ erzeugte lokal konvexe Topologie $\mathcal{T}_K$ auf $\mathcal{D}_K(\Omega)$ mit der Relativtopologie von $(\mathcal{D}(\Omega), \mathcal{T}_\mathcal{D})$ auf $\mathcal{D}_K(\Omega)$ überein.

b) $(\mathcal{D}(\Omega), \mathcal{T}_\mathcal{D})$ ist ein Hausdorffraum.

Beweis siehe [4].

Lemma 3.3.7. *Sei $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{K}$ linear. Dann sind äquivalent:*

1. $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

2. Für alle kompakten Mengen $K \subseteq \Omega$ gilt $T|_{\mathcal{D}_K(\Omega)} \in (\mathcal{D}_K(\Omega))'$.

3. Für alle kompakte Mengen $K \subseteq \Omega$ existieren ein $m \in \mathbb{N}_0$ und ein $C \ge 0$, sodass für alle $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ die Ungleichung

$$|T\varphi| \le C \cdot \sup_{|\beta|\le m} \|\partial_x^\beta \varphi\|_{C^0(\Omega)}$$

gilt.

4. T ist folgenstetig in 0, das heißt, falls φ_n für $n \to \infty$ in $(\mathcal{D}(\Omega), \mathcal{T}_{\mathcal{D}})$ gegen 0 konvergiert, so folgt $T\varphi_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

5. T ist folgenstetig, das heißt, falls φ_n für $n \to \infty$ in $(\mathcal{D}(\Omega), \mathcal{T}_{\mathcal{D}})$ gegen φ konvergiert, so folgt $T\varphi_n \xrightarrow{n\to\infty} T\varphi$.

Beweis. Man zeigt, dass die behaupteten Äquivalenzen darauf beruhen, dass $(\mathcal{D}_K(\Omega), \mathcal{T}_K)$ von einer abzählbaren Halbnormfamilie erzeugt wird und daher $(\mathcal{D}_K(\Omega), \mathcal{T}_K)$ metrisierbar ist. Für nähere Details siehe [4]. □

Bemerkung 28.

1. *Sei $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, wobei $L^1_{loc}(\Omega)$ die Menge aller messbaren Funktionen auf Ω (modulo Nullmengen) ist, welche für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq \Omega$ in $L^1(K)$ liegen. Dann ist durch*
$$T_f(\varphi) := \int_\Omega f(y)\varphi(y)\, \mathrm{d}y$$
für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ eine Distribution definiert.
Wegen des Fundamentallemmas der Variationsrechnung ist $f \mapsto T_f$ als Abbildung von $L^1_{loc}(\Omega)$ nach $\mathcal{D}'(\Omega)$ injektiv.

2. *Sei $x \in \Omega$. Für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ wird durch*
$$\delta_x(\varphi) := \varphi(x)$$
das sogenannte Dirac-Distribution *zum Punkt x definiert. Es gibt aber kein $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ mit $\delta_x = T_f$. Denn anderenfalls würde für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ gelten:*
$$y \mapsto \psi(y) := |y-x|^2\varphi(y) \ \in \mathcal{D}(\Omega).$$
Daraus folgt dann für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:
$$0 = \psi(x) = \delta_x(\psi) = \int_\Omega f(y)|y-x|^2\varphi(y)\, \mathrm{d}y$$
und man erhält $f = 0$ fast überall, was
$$\int_\Omega f(y)\varphi(y)\, \mathrm{d}y = 0 \neq \delta_x(\varphi)$$
bedeuten würde und folglich einen Widerspruch liefern würde.
Trotzdem schreibt man häufig formal:
$$\int_\Omega \delta_x(y)\varphi(y)\, \mathrm{d}y = \varphi(x).$$

Satz 3.3.8. *Sei $f_n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = \left(\frac{n}{4\pi}\right)^{\frac{d}{2}} e^{-\frac{n|x|^2}{4}}$. Dann konvergiert f_n für $n \to \infty$ bezüglich der schwach* Topologie $\sigma\left(\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)\right)$ gegen δ_0.*

Beweis. Es gilt
$$\int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)\, \mathrm{d}x = \sqrt{n}\int_{\mathbb{R}^d} f_1\left(\sqrt{n}x\right)\, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} f_1(y)\, \mathrm{d}y = 1.$$

Sei $\varepsilon > 0$ und $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Dann existiert ein $\delta > 0$, sodass für alle $|x| < \delta$ gilt:

$$|\varphi(x) - \varphi(0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Daher folgt für hinreichend große n:

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega f_n(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x - \varphi(0)\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)\left(\varphi(x) - \varphi(0)\right)\,\mathrm{d}x\right| \\ &\leq \underbrace{\int_{|x|<\delta} f_n(x)\underbrace{|\varphi(x) - \varphi(0)|}_{<\varepsilon/2}\,\mathrm{d}x}_{<\varepsilon/2} + \underbrace{\int_{|x|\geq\delta} f_n(x)\underbrace{|\varphi(x) - \varphi(0)|}_{\text{beschränkt}}\,\mathrm{d}x}_{<\varepsilon/2}\end{aligned}$$

und daraus die Behauptung. □

Definition 3.3.2 (distributionelle Ableitung)**.** *Die Abbildung* ∂_x^β *mit*

$$\partial_x^\beta T(\varphi) = (-1)^{|\beta|} T\left(\partial_x^\beta \varphi\right)$$

heißt β*-te* distributionelle Ableitung *der Distribution* T*.*

Beachte:
Für die zu $\partial_x^\beta f$ gehörende Distribution $T_{\partial_x^\beta f}$ gilt mit Hilfe der partiellen Integration:

$$\begin{aligned}T_{\partial_x^\beta f}(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}^d} \partial_x^\beta f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\ &= (-1)^{|\beta|}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\partial_x^\beta\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\ &= (-1)^{|\beta|} T_f\left(\partial_x^\beta\varphi\right) \\ &= \left(\partial_x^\beta T_f\right)(\varphi).\end{aligned}$$

Die obige Definition verallgemeinert dies für Distributionen, die nicht von Funktionen induziert werden.

Beispiel 21. *Sei* $f(x) := |x|$*. Für alle* $\varphi \in C_c^\infty(-1,1)$ *gilt:*

$$\begin{aligned}T_f(\partial_x\varphi) &= \int_{-1}^0 -x\,\partial_x\varphi(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x\,\partial_x\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^0 \varphi(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{dx} \\ &= -T_g(\varphi)\end{aligned}$$

mit

$$g(x) = \begin{cases} -1, & \text{wenn } x < 0, \\ 0, & \text{wenn } x = 0, \\ 1, & \text{wenn } x > 0. \end{cases}$$

g (eigentlich T_g) ist also die distributionelle Ableitung von f (eigentlich T_f). Da $g \in L^2(-1,1)$, ist g auch die schwache Ableitung von f und somit $f \in H^1(-1,1)$. Außerdem gilt für alle $\varphi \in C_c^\infty(-1,1)$:

$$T_f\left(\partial_x^2\varphi\right) = \int_{-1}^0 \partial_x\varphi(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \partial_x\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 2\varphi(0) = 2\delta_0(\varphi).$$

Also ist $2\delta_0$ die zweite distributionelle Ableitung von f, aber keine zweite schwache Ableitung von f.

Satz 3.3.9. *Die Abbildung* $\partial_x^\beta : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ *mit* $T \mapsto \partial_x^\beta T$ *ist bezüglich* $\sigma\left(\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)\right)$ *stetig.*

Beweis. Dies folgt wegen $p_m\left(\partial_x^\beta \varphi\right) \leq p_{m+|\beta|}(\varphi)$. Für nähere Details siehe [4]. □

Eigenschaften der schwachen Konvergenz

Lemma 3.3.10. *Sei* X *ein normierter Raum. Dann gilt:*

1. *Sind* $x_k, x \in X$ *und* $k \in \mathbb{N}$, *so gilt*
$$x_k \rightharpoonup x \ \text{ in } X$$
für $k \to \infty$ *genau dann, wenn*
$$J_X x_k \overset{*}{\rightharpoonup} J_X x \ \text{ in } X''$$
für $k \to \infty$, *wobei* $J_X x(x') = x'(x)$ *für* $x \in X$ *und* $x' \in X'$ *ist.*
2. *Sind* $x_k', x' \in X$ *und* $k \in \mathbb{N}$, *so gilt:*
$$x_k' \rightharpoonup x' \ \text{ in } X'$$
impliziert
$$x_k' \overset{*}{\rightharpoonup} x' \ \text{ in } X'.$$
3. *Der schwache Grenzwert und der schwach***-Grenzwert von Folgen sind eindeutig bestimmt.*
4. *Aus der Normkonvergenz folgt die schwache Konvergenz und die schwach***-Konvergenz.*
5. *Aus* $x_k' \overset{*}{\rightharpoonup} x'$ *in* X' *für* $k \to \infty$ *folgt*
$$\|x'\|_{X'} \leq \liminf_{k\to\infty} \|x_k'\|_{X'}.$$
6. *Aus* $x_k \rightharpoonup x$ *in* X *für* $k \to \infty$ *folgt*
$$\|x\|_X \leq \liminf_{k\to\infty} \|x_k\|_X.$$
7. *Schwach konvergente Folgen sind beschränkt in* X. *Ist* X *vollständig, dann sind außerdem schwach***-konvergente Folgen beschränkt in* X'.
8. *Aus* $x_k \to x$ *in* X *und* $x_k' \overset{*}{\rightharpoonup} x'$ *in* X' *für* $k \to \infty$ *folgt*
$$x_k'(x_k) \xrightarrow{k\to\infty} x'(x) \ \text{ in } \mathbb{K},$$
falls X *vollständig ist. Dieselbe Implikation gilt auch, wenn* $x_k \overset{k\to\infty}{\rightharpoonup} x$ *in* X *und* $x_k' \xrightarrow{k\to\infty} x'$ *in* X' *gegeben ist, wobei hier die Vollständigkeit von* X *nicht notwendig ist.*

Bemerkung 29. *Die Aussage* 6. *nennt man auch* Unterhalbstetigkeit *der Norm bezüglich der schwachen Konvergenz von Folgen.*

Beweis von Lemma 3.3.10.

1. Es gilt:

$$x_k \rightharpoonup x \text{ in } X \;\Leftrightarrow\; \forall x' \in X' : \underbrace{x'(x_k)}_{=J_X x_k(x')} \to \underbrace{x'(x)}_{=J_X x(x')} \quad \text{in } \mathbb{K}$$
$$\Leftrightarrow\; J_X x_k \overset{*}{\rightharpoonup} J_X x \;\text{ in } X''.$$

2. folgt wegen $x'_k(x) = J_X(x'_k)$.

3. folgt unter Ausnutzung von Korollar 3.1.4 2..

4. folgt aus der Stetigkeit der Elemente von X' und der Definition von schwach*-Konvergenz.

5. Für alle $x \in X$ gilt $|x'_k(x)| \leq \|x'_k\|_{X'}\|x\|$. Daher folgt

$$|x'(x)| = \lim_{k\to\infty} |x'_k(x)| \leq \liminf_{k\to\infty} \|x'_k\|_{X'}\|x\|$$

   und somit

$$\|x'\|_{X'} \leq \liminf_{k\to\infty} \|x'_k\|_{X'}.$$

6. Analog zum Beweis von 5. folgt für alle $x' \in X'$:

$$|x'(x)| \leq \|x'\|_{X'} \liminf_{k\to\infty} \|x_k\|.$$

   Ist $x \neq 0$, dann existiert nach Korollar 3.1.4 1. ein x' mit $\|x'\|_{X'} = 1$ und $x'(x) = \|x\|$. Also folgt die Behauptung für $x \neq 0$. Für $x = 0$ ist die Behauptung offensichtlich.

7. Gilt $x'_k \overset{*}{\rightharpoonup} x'$ in X', so ist für alle $x \in X$: $\sup_{k\in\mathbb{N}}|x'_k(x)| < \infty$. Ist X vollständig, dann folgt nach dem Satz von Banach-Steinhaus auch $\sup_{k\in\mathbb{N}}\|x'_k\|_{X'} < \infty$.
   Gilt $x_k \rightharpoonup x$ in X, so folgt nach 1. $J_X x_k \overset{*}{\rightharpoonup} J_X x$ in X''. Da Dualräume vollständig sind, folgt nach dem bisher Gezeigten, dass

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \underbrace{\|J_X x_k\|_{X''}}_{=\|x_k\|} < \infty$$

   und damit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in X beschränkt ist.

8. Für die erste Aussage haben wir:

$$\begin{aligned} |x'(x) - x'_k(x_k)| &\leq |x'(x) - x'_k(x)| + |x'_k(x_k - x)| \\ &\leq \underbrace{|(x' - x'_k)(x)|}_{\to 0} + \underbrace{\|x'_k\|}_{\text{beschränkt nach 7.}} \cdot \underbrace{\|x_k - x\|}_{\to 0} \to 0 \end{aligned}$$

   für $k \to \infty$. Also gilt die erste Aussage. Die zweite Aussage folgt analog.

□

Beispiel 22.

a) *Sei* (Ω, Σ, μ) *ein Maßraum und sei* $1 \leq p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. *Im Fall* $p = 1$ *sei* μ *zusätzlich* σ*-endlich. Für* $g \in L^{p'}(\Omega)$ *sei*

$$J_{p'}(g)(f) := \int_\Omega f\overline{g} \, \mathrm{d}\mu$$

für alle $f \in L^p(\Omega)$.
Dann ist $J_{p'} : L^{p'}(\Omega) \to (L^p(\Omega))'$ *ein konjugiert linearer isometrischer Isomorphismus. Für* $p = 2 = p'$ *stimmt* J_2 *mit dem Isomorphismus aus dem Rieszschen Darstellungssatz überein.*
Folglich gilt für alle $f_k, f \in L^p(\Omega)$:

$$f_k \rightharpoonup f \ \text{ in } L^p(\Omega)$$

für $k \to \infty$ *genau dann, wenn für alle* $g \in L^{p'}(\Omega)$:

$$\int_\Omega f_k\overline{g} \, \mathrm{d}\mu \xrightarrow{k\to\infty} \int_\Omega f\overline{g} \, \mathrm{d}\mu$$

gilt.

b) *Sei* $K \subseteq \mathbb{R}^n$ *eine kompakte Teilmenge. Dann ist durch*

$$J(\nu)(f) := \int_K f \, \mathrm{d}\nu$$

ein linearer isometrischer Isomorphismus $J : rca(K) \to (C^0(K))'$, *wobei* $rca(K)$ *der Raum der* regulären signierten Borelmaße *auf* K *ist, definiert.*
Folglich gilt für alle $f_k, f \in C^0(K)$:

$$f_k \rightharpoonup f \ \text{ in } C^0(K)$$

für $k \to \infty$ *genau dann, wenn für alle* $\nu \in rca(K)$:

$$\int_K f_k \, \mathrm{d}\nu \xrightarrow{k\to\infty} \int_K f \, \mathrm{d}\nu$$

gilt.

c) *Sei* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ *eine offene Teilmenge,* $m \in \mathbb{N}$ *und* $1 \leq p \leq \infty$. *Für* $u_k, u \in W^{m,p}(\Omega)$ *gilt*

$$u_k \rightharpoonup u \ \text{ in } W^{m,p}(\Omega)$$

für $k \to \infty$ *genau dann, wenn für alle* $|s| \leq m$:

$$\partial_x^s u_k \rightharpoonup \partial_x^s u \ \text{ in } L^p(\Omega)$$

für $k \to \infty$ *gilt. Die gleiche Aussage gilt für* $W_0^{m,p}(\Omega)$.

Beweis siehe [1] oder [4].

Satz 3.3.11. *Sei* X *ein separabler Banachraum. Dann ist die abgeschlossene Einheitskugel* $\overline{B_1(0)}$ *von* X' *schwach*-folgenkompakt.*

Beweis. Sei $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ dicht in X. Ist $(x'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X' mit $\|x'_k\| \leq 1$, dann sind $(x'_k(x_n))_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkte Folgen in $\mathbb{K}$. Daher gibt es nach dem Diagonalverfahren eine Teilfolge $k_l \to \infty$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ der Grenzwert

$$\lim_{k_l\to\infty} x'_{k_l}(x_n)$$

in $\mathbb{K}$ existiert. Dann existiert aber auch für alle $y \in Y := \operatorname{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ der Grenzwert

$$x'(y) := \lim_{k_l\to\infty} x'_{k_l}(y)$$

und $x' : Y \to \mathbb{K}$ ist linear. Wegen

$$|x'(y)| = \lim_{k_l\to\infty} \left|x'_{k_l}(y)\right| \leq \|y\|$$

ist x' gleichmäßig stetig auf Y und lässt sich daher eindeutig zu einer stetigen linearen Abbildung x' auf $X = \overline{Y}$ fortsetzen. Somit ist $x' \in X'$, wobei $\|x'\| \leq 1$ ist.
Für alle $x \in X$ und für alle $y \in Y$ gilt dann:

$$\begin{aligned}\left|\left(x'_{k_l} - x'\right)(x)\right| &\leq \left|\left(x' - x'_{k_l}\right)(x-y)\right| + \left|\left(x' - x'_{k_l}\right)(y)\right| \\ &\leq 2\|x-y\| + \left|\left(x' - x'_{k_l}\right)(y)\right|.\end{aligned}$$

Der erste Summand kann wegen $\overline{Y} = X$ beliebig klein gemacht werden und der zweite Summand konvergiert für jedes y für $k_l \to \infty$ gegen Null. Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Bemerkung 30. *Dieser Satz gilt dann auch für jede andere abgeschlossene Kugel $\overline{B_R(x)}$. Insbesondere hat jede beschränkte Folge in X' eine schwach*-konvergente Teilfolge.*

Bemerkung 31. *Ist X nicht separabel, dann gilt die Aussage von Satz 3.3.11 im Allgemeinen nicht. Gegenbeispiel: Sei $X = L^\infty(]0,1[)$ und für $\varepsilon > 0$:*

$$T_\varepsilon f := \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon f(x)\,dx \qquad \text{für alle } f \in L^\infty(]0,1[).$$

Dann gilt $T_\varepsilon \in (L^\infty(]0,1[))'$ mit $\|T_\varepsilon\| = 1$, aber für keine Nullfolge $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist $(T_{\varepsilon_n})_{n\in\mathbb{N}}$ schwach konvergent in $(L^\infty(]0,1[))'$. Denn angenommen, $(T_{\varepsilon_n})_{n\in\mathbb{N}}$ sei schwach* konvergent. Durch Übergang zu einer Teilfolge (die dann auch schwach* konvergent ist und wieder mit $(T_{\varepsilon_n})_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnet werde) kann angenommen werden, dass*

$$1 > \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} \longrightarrow 0 \quad \text{für } n \to \infty$$

gilt. Betrachte die durch

$$f(x) := (-1)^j \quad \text{für } \varepsilon_{j+1} < x < \varepsilon_j \text{ und } j \in \mathbb{N}$$

definierte Funktion $f \in X$. Es ist

$$T_{\varepsilon_n} f = \frac{1}{\varepsilon_n}\left((\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1})(-1)^n + \int_0^{\varepsilon_{n+1}} f(x)\,dx\right),$$

also

$$|T_{\varepsilon_n} f - (-1)^n| \leq \frac{1}{\varepsilon_n}\left(\varepsilon_{n+1} + \int_0^{\varepsilon_{n+1}} |f(x)|\,dx\right) \leq \frac{2\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Daraus folgt, dass die Folge $(T_{\varepsilon_n} f)_{n\in\mathbb{N}}$ die beiden Häufungspunkte ± 1 besitzt. Daher kann $(T_{\varepsilon_n})_{n\in\mathbb{N}}$ nicht schwach konvergent sein.*

Satz 3.3.12 (Satz von Alaoglu)**.** *Sei X ein Banachraum. Dann ist $\overline{B_1(0)} \subseteq X'$ überdeckungskompakt bezüglich der schwach* Topologie auf X'.*

Beweisstrategie. Man führt die Aussage zurück auf den Satz von Tychonoff. Für nähere Details siehe [2] oder [4]. □

Definition 3.3.3. *Sei X ein Banachraum. So wird X genau dann* reflexiv *genannt, wenn die Abbildung $J_X : X \to X''$ surjektiv (und damit bijektiv) ist.*

Beispiel 23.

1. *Jeder Hilbertraum ist reflexiv.*

2. *$L^p(\Omega)$ ist für $1 < p < \infty$ reflexiv.*

3. *$W^{m,p}(\Omega)$ ist für $1 < p < \infty$ reflexiv.*

4. *$C^0(K)$ mit $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt ist nicht reflexiv, falls K nicht aus endlich vielen Punkten besteht.*

Lemma 3.3.13. *Sei X ein Banachraum.*

1. *Ist X reflexiv, dann stimmen die schwach* Konvergenz und die schwache Konvergenz auf X' überein.*

2. *Ist X reflexiv, dann ist auch jeder abgeschlossene Unterraum von X reflexiv.*

3. *Ist $T : X \to Y$ ein Isomorphismus, dann ist X genau dann reflexiv, wenn Y reflexiv ist.*

4. *X ist genau dann reflexiv, wenn X' reflexiv ist.*

Beweis.

1. Folgt mit Lemma 3.3.10.

2. Sei $Y \subseteq X$ ein abgeschlossener Unterraum. Zu $y'' \in Y''$ sei

$$x''(x') := y''\left(x' \mid_Y\right)$$

für alle $x' \in X'$. Dann ist $x'' \in X''$. Sei $x := J_X^{-1} x''$. Für alle $x' \in X'$ mit $x' = 0$ auf Y gilt dann

$$x'(x) = x''(x') = y''\left(x' \mid_Y\right) = 0,$$

woraus nach Korollar 3.1.4 folgt, dass $x \in Y$ ist. Ist $x' \in X'$ eine Fortsetzung von y' nach dem Satz von Hahn-Banach, dann gilt für alle $y' \in Y'$:

$$y'(x) = x'(x) = y''\left(x' \mid_Y\right) = y''(y')$$

und somit

$$y'' = J_Y x = J_Y J_X^{-1} x''.$$

3. Die Behauptung ist symmetrisch in X und Y. Also reicht es, den Fall zu betrachten, dass X reflexiv ist. Sei $y'' \in Y''$. Dann ist durch
$$\forall x' \in X' : \qquad x''(x') := y''(x' \circ T^{-1})$$
ein $x'' \in X''$ definiert und für $y' \in Y'$ gilt mit $x' = y' \circ T$:
$$y''(y') = x''(y' \circ T) = (y' \circ T)(J_X^{-1} x'') = y'(T J_X^{-1} x''),$$
also $y'' = J_Y T J_X^{-1} x''$.

4. " $\Rightarrow$ " : Ist $x''' \in X'''$ so ist $x''' \circ J_X \in X'$ und für alle $x'' \in X''$ gilt
$$x'''(x'') = (x''' \circ J_X)(J_X^{-1} x'') = x''(x''' \circ J_X),$$
also $x''' = J_{X'}(x''' \circ J_X)$.

" $\Leftarrow$ " : Nach der gerade gezeigten Schlussrichtung " $\Rightarrow$ " angewandt auf den Banachraum X' folgt, dass X'' reflexiv ist. Da J_X isometrisch ist, ist $J_X(X)$ abgeschlossener Unterraum von X'', somit nach 2. auch reflexiv. Nach 3. muss dann X ebenfalls reflexiv sein.

□

Beweis von Beispiel 23.

1. Sei $R_X : X \to X'$ der konjugiert lineare isometrische Isomorphismus aus dem Rieszschen Darstellungssatz. Für $x'' \in X''$ ist durch
$$x'(y) := \overline{x''(R_X y)}$$
für alle $y \in X$ ein $x' \in X'$ definiert. Ist $x := R_X^{-1} x'$, dann gilt für alle $y \in X$:
$$x''(R_X y) = \overline{R_X x(y)} = \overline{\langle y, x \rangle} = R_X y(x),$$
das heißt, es ist
$$x'' = J_X x = J_X R_X^{-1} x'.$$
Bemerkung: Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist $J_X^{-1} = R_X^{-1} R_X'$, wobei $R_X' : X'' \to X'$ die Adjungierte zu R_X ist.

2. Hier argumentiert man ähnlich wie in 1., wobei R_X durch J_p ersetzt wird. Die konjugiert linearen isometrischen Isomorphismen
$$J_p : L^p(\Omega) \to (L^{p'}(\Omega))' \text{ und } J_{p'} : L^{p'}(\Omega) \to (L^p(\Omega))'$$
aus Beispiel 22 haben die Eigenschaft
$$\forall f \in L^p(\Omega),\, g \in L^{p'}(\Omega) : \ \overline{J_{p'} g(f)} = J_p f(g).$$
Für $f'' \in (L^p(\Omega))''$ ist durch
$$g'(g) := \overline{f''(J_{p'} g)}$$
für alle $g \in L^{p'}(\Omega)$ ein $g' \in (L^{p'}(\Omega))'$ definiert. Ist $f := J_p^{-1} g'$, dann gilt für alle $g \in L^{p'}(\Omega)$:
$$g'(g) = J_p f(g) = \overline{J_{p'} g(f)} = \overline{J_{L^p(\Omega)} f(J_{p'} g)}.$$

Also gilt

$$\forall g \in L^{p'}(\Omega): \qquad f''(J_{p'}g) = J_{L^p(\Omega)}f(J_{p'}g).$$

Da $J_{p'}$ surjektiv ist, folgt

$$f'' = J_{L^p(\Omega)}f = J_{L^p(\Omega)}J_p^{-1}g'.$$

Bemerkung: Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist $J_{L^p(\Omega)}^{-1} = J_p^{-1}J'_{p'}$, wobei $J'_{p'} : (L^p(\Omega))'' \to (L^{p'}(\Omega))'$ die Adjungierte zu $J_{p'}$ ist.

3. Sei $X = W^{m,p}(\Omega)$. Durch $Ev(x) := (\partial_x^s v(x))_{|s|\leq m}$ für alle $v \in X$ und fast alle $x \in \Omega$ ist eine stetige lineare Abbildung $E : X \to L^p(\Omega, \mathbb{K}^M)$ definiert, wobei $M := \binom{n+m}{n}$ die Anzahl der Multiindizes s mit $|s| \leq m$ ist. Außerdem lässt sich $\|Ev\|_{L^p(\Omega,\mathbb{K}^M)}$ nach oben und unten durch $\|v\|_{W^{m,p}(\Omega)}$ abschätzen. Aufgrund der Vollständigkeit von X ist daher $Y := E(X)$ ein abgeschlossener Unterraum von $L^p(\Omega, \mathbb{K}^M)$. Also ist E eine bijektive stetige lineare Abbildung von X nach Y mit einer stetigen Inversen $E^{-1} \in \mathrm{Lin}(Y, X)$.

   Nach 2. und Lemma 3.3.13 2. ist der abgeschlossene Unterraum Y reflexiv (der Beweis von 2. geht analog für Funktionen mit Werten im $\mathbb{K}^M$). Nach Lemma 3.3.13 3. folgt dann die Behauptung.

4. siehe [1]

□

Lemma 3.3.14. *Für jeden Banachraum X gilt: falls X' separabel ist, dann ist auch X separabel.*

Beweis. Sei $\{x'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dicht in X'. Wähle $x_n \in X$ mit

$$|x'_n(x_n)| \geq \frac{1}{2}\|x'_n\| \;\wedge\; \|x_n\| = 1$$

und definiere $Y := \overline{\mathrm{span}\,\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$. Ist dann $x' \in X'$ mit $x' = 0$ auf Y, so folgt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\|x' - x'_n\| \;\geq\; |(x' - x'_n)(x_n)| \;=\; |x'_n(x_n)| \;\geq\; \frac{1}{2}\|x'_n\| \;\geq\; \frac{1}{2}(\|x'\| - \|x'_n - x'\|)\,,$$

also

$$\|x'\| \leq 3 \inf_n \|x' - x'_n\| = 0,$$

da $\{x'_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine dichte Teilmenge war. Nach Korollar 3.1.4 folgt daraus $Y = X$. □

Satz 3.3.15. *Sei X ein reflexiver Banachraum. Dann ist $\overline{B_1(0)} \subseteq X$ schwach folgenkompakt.*

Beweis. Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\overline{B_1(0)} \subseteq X$ und $Y := \overline{\mathrm{span}\,\{x_k : k \in \mathbb{N}\}}$. Dann ist nach Lemma 3.3.13 2. auch Y reflexiv und nach Definition auch separabel. So muss auch $Y'' = J_Y Y$ separabel sein und nach Lemma 3.3.14 ist dann Y' ebenfalls separabel. Daher können wir Satz 3.3.11 auf Y' und die Folge $(J_Y x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq Y''$ anwenden. Somit gibt es ein $y'' \in Y''$, so dass für eine Teilfolge $J_Y x_{k_l}$ gilt:

$$J_Y x_{k_l}(y') \xrightarrow{k_l\to\infty} y''(y')$$

für alle $y' \in Y'$. Ist $x := J_Y^{-1} y'' \in Y$, so gilt daher für alle $y' \in Y'$:

$$y'\left(x_{k_l}\right) = J_Y x_{k_l}(y') \xrightarrow{k_l \to \infty} y''(y') = y'(x).$$

Da für $x' \in X'$ die Abbildung $x' \mid_Y$ in Y' liegt, folgt auch

$$x'\left(x_{k_l}\right) \xrightarrow{k_l \to \infty} x'(x),$$

also

$$x_{k_l} \xrightarrow{k_l \to \infty} x \text{ in } X.$$

$\square$

Bemerkung 32. *Dies gilt auch für jede andere abgeschlossene Kugel $\overline{B_R(x)} \subseteq X$. Insbesondere hat jede beschränkte Folge in X eine schwach konvergente Teilfolge.*

Satz 3.3.16. *Seien X, Y Banachräume und $T : X \to Y$ linear.*

1. *Ist $T \in K(X, Y)$, dann ist T vollstetig, das heißt, $x_n \rightharpoonup x$ in X für $n \to \infty$ impliziert $Tx_n \to Tx$ in Y für $n \to \infty$.*

2. *Ist X reflexiv und T vollstetig, dann ist $T \in K(X, Y)$.*

Beweis.

1. Sei $T \in K(X, Y)$ und es gelte $x_n \rightharpoonup x$ für $n \to \infty$. Nach Lemma 3.3.10 ist die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt, also gibt es ein $y \in Y$, so dass $Tx_{n_k} \to y$ für eine Teilfolge $n_k \to \infty$ gilt.
   Für $y' \in Y'$ definiert die Abbildung $z \mapsto y'(Tz)$ ein Element in X'. Also gilt $y'(Tx_{n_k}) \to y'(Tx)$ für $n_k \to \infty$ und somit $Tx_{n_k} \rightharpoonup Tx$ für $n_k \to \infty$. Da die Normkonvergenz die schwache Konvergenz impliziert, muss daher $y = Tx$ sein. Also gilt $Tx_{n_k} \to Tx$ für eine Teilfolge $n_k \to \infty$.
   Da die obige Argumentation aber auch auf jede beliebige Teilfolge von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ angewandt werden kann, folgt, dass die gesamte Folge $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nur einen Häufungspunkt Tx hat, also gegen Tx konvergiert.

2. Aus der Vollstetigkeit folgt die Stetigkeit von T, also ist $T \in \mathrm{Lin}(X, Y)$. Außerdem besitzen in reflexiven Räumen beschränkte Folgen nach Satz 3.3.15 schwach konvergente Teilfolgen, so dass aufgrund der Vollstetigkeit von T die Behauptung folgt.

$\square$

Satz 3.3.17. *Sei X ein normierter Raum und $M \subseteq X$ konvex und abgeschlossen. Dann ist M auch schwach folgenabgeschlossen, das heißt, für $x_k \in M$, $k \in \mathbb{N}$, gilt*

$$x_k \xrightharpoonup{k \to \infty} x \text{ in } X \implies x \in M.$$

Beweis. Falls $x \notin M$, dann gibt es nach dem Trennungssatz ein $x' \in X'$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass $\mathrm{Re}\,(x'(y)) \leq \alpha$ für alle $y \in M$ und $\mathrm{Re}\,(x'(x)) > \alpha$ gilt. Dann folgt $\mathrm{Re}\,(x'(x_k)) \leq \alpha$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Wegen der schwachen Konvergenz gilt dann aber auch $\mathrm{Re}\,(x'(x)) \leq \alpha$, womit wir einen Widerspruch erhalten haben. Somit ist die Behauptung bewiesen. $\square$

Theorem 3.3.18. *Sei X ein reflexiver Banachraum und $M \subseteq X$ nicht leer, konvex und abgeschlossen. Dann gibt es zu $x_0 \in X$ ein $x \in M$ mit*

$$\|x - x_0\| = \operatorname{dist}(x_0, M).$$

Beweis. Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Minimalfolge, das heißt, es gilt $x_k \in M$ und

$$\|x_k - x_0\| \xrightarrow{k\to\infty} \operatorname{dist}(x_0, M).$$

Dann ist $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge. Nach Satz 3.3.15 gibt es eine Teilfolge $(x_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$, sodass $x_{k_l} \xrightharpoonup{k_l\to\infty} x$ in X. Nach Satz 3.3.17 ist $x \in M$.
Da auch $x_{k_l} - x_0 \xrightharpoonup{k_l\to\infty} x - x_0$ in X gilt, folgt aufgrund der Unterhalbstetigkeit der Norm (Lemma 3.3.10 6.):

$$\|x - x_0\| = \operatorname{dist}(x_0, M).$$

□

A. Grundlagen der Topologie

Definition A.0.1 (Topologischer Raum)**.** *Sei X eine Menge und $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann heißt $(X, \mathcal{T})$* topologischer Raum*, falls gilt:*

(T1) $\emptyset \in \mathcal{T} \ \wedge \ X \in \mathcal{T}$,

(T2) $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T} \ \Rightarrow \ \bigcup_{U \in \mathcal{T}'} U \in \mathcal{T}$,

(T3) $U_1, U_2 \in \mathcal{T} \ \Rightarrow \ U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$.

Die Elemente von $\mathcal{T}$ heißen offene Mengen*.*

Definition A.0.2. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.*

- *Die Teilmenge $A \subseteq X$ heißt* abgeschlossen*, falls $X \setminus A$ offen ist.*
- *Für eine Teilmenge $M \subseteq X$ heißt $\mathring{M} := \{x \in M : \exists_{U \in \mathcal{T}} : U \subseteq M \ \wedge \ x \in U\}$ das* Innere *von M.*
- $\overline{M} := X \setminus (X \mathring{\setminus} M)$ *heißt der* Abschluss *von M.*
- $\partial M := \overline{M} \setminus \mathring{M}$ *heißt der* Rand *von M.*
- *M heißt* dicht *in X, falls $\overline{M} = X$.*

Satz A.0.1. *Beliebige Schnitte und endliche Vereinigungen von abgeschlossenen Mengen sind abgeschlossen. Die leere Menge $\emptyset$ und X sind abgeschlossen.*

Definition A.0.3 (Umgebung, Umgebungsfilter, Umgebungsbasis)**.** *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $x \in X$.*

1. *$U \subseteq X$ heißt* Umgebung *von x, wenn es eine offene Menge $\mathcal{O}$ mit $x \in \mathcal{O} \subseteq U$ gibt.*
2. *Das Mengensystem $\mathcal{U}(x)$ aller Umgebungen von x heißt* Umgebungsfilter *von x.*
3. *Eine Teilfamilie $\mathcal{V}(x) \subseteq \mathcal{U}(x)$ eines Umgebungsfilters $\mathcal{U}(x)$ heißt* Umgebungsbasis *von x, falls für jedes $U \in \mathcal{U}(x)$ ein $V \in \mathcal{V}(x)$ mit $V \subseteq U$ existiert.*

Satz A.0.2.

a) *Sei* $(X, \mathcal{T})$ *ein topologischer Raum und* $x \in X$. *Dann gilt für den Umgebungsfilter* $\mathcal{U}(x)$*:*

(U1) $\forall_{U \in \mathcal{U}(x)} : x \in U$.

(U2) $\forall_{U \in \mathcal{U}(x)} \exists_{V \in \mathcal{U}(x)} \forall_{y \in V} : U \in \mathcal{U}(y)$.

(U3) $\forall_{U,V \subseteq X} : ((U \subseteq V \wedge U \in \mathcal{U}(x)) \Rightarrow V \in \mathcal{U}(x))$.

(U4) $\forall_{U,V \in \mathcal{U}(x)} : U \cap V \in \mathcal{U}(x)$.

b) *Sei* X *eine Menge und für jedes* $x \in X$ *existiere* $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{P}(X)$, *sodass* $(U1)-(U4)$ *erfüllt seien. Dann gibt es genau einen topologischen Raum* $(X, \mathcal{T})$, *sodass die* $\mathcal{U}(x)$ *Umgebungsfilter von* x *sind. Es ist* $\mathcal{T} := \bigcup_{x \in X} \mathcal{O}(x) \cup \{\emptyset\}$ *mit* $\mathcal{O}(x) := \{\mathring{U} : U \in \mathcal{U}(x)\}$ *und* $\mathring{U} := \{y \in X : U \in \mathcal{U}(y)\}$.

Satz A.0.3.

1. *Jeder metrische Raum induziert einen topologischen Raum. In diesem Fall besitzt jeder Punkt* x *des topologischen Raumes eine abzählbare Umgebungsbasis* $\mathcal{V}(x)$.

2. *Nicht jeder topologische Raum ist metrisierbar (das heißt von einem metrischen Raum induziert).*

Definition A.0.4 (stärker oder feiner bzw. schwächer oder gröber)**.** *Seien* $(X, \mathcal{T}_1)$, $(X, \mathcal{T}_2)$ *topologische Räume. Dann heißt* $\mathcal{T}_2$ stärker oder feiner *als* $\mathcal{T}_1$ *beziehungsweise* $\mathcal{T}_1$ schwächer oder gröber *als* $\mathcal{T}_2$, *falls* $\mathcal{T}_1 \subsetneq \mathcal{T}_2$ *ist.*

Definition A.0.5 (Hausdorff-Raum)**.** *Ein topologischer Raum* $(X, \mathcal{T})$ *heißt* Hausdorff-Raum*, wenn gilt:*

$$\forall_{x,y \in X} \left(x \neq y \Rightarrow \exists_{U \in \mathcal{U}(x)} \exists_{V \in \mathcal{U}(y)} : U \cap V = \emptyset \right).$$

Definition A.0.6 (Grenzwert)**.** *Eine Folge* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq (X, \mathcal{T})$ *konvergiert gegen* $x \in X$ *(Kurzschreibweise:* $x_n \xrightarrow{n \to \infty} x$ *)*

$$:\Leftrightarrow \forall_{V \in \mathcal{V}(x)} \exists_{n_V \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_V} : x_n \in V.$$

Man nennt dann x *den* Grenzwert *von* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Satz A.0.4. *Grenzwerte von Folgen in Hausdorff-Räumen sind eindeutig bestimmt.*

Definition A.0.7 (folgenabgeschlossen)**.** *Sei* $X, \mathcal{T}$ *ein topologischer Raum. Eine Teilmenge* $A \subseteq X$ *heißt folgenabgeschlossen*

$$:\Leftrightarrow \forall_{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A} \left(x_n \xrightarrow{n \to \infty} x \Rightarrow x \in A \right).$$

Satz A.0.5. *Falls* A *abgeschlossen ist, ist* A *auch folgenabgeschlossen. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.*

Definition A.0.8 (stetig). *Seien $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume. Eine Abbildung $T : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ heißt* stetig

$$:\Leftrightarrow \forall_{x \in X} \forall_{V \in \mathcal{V}(Tx)} \exists_{U \in \mathcal{V}(x)} : T(U) \subseteq V.$$

Satz A.0.6.

1. *Es sind äquivalent:*
   a) *T ist stetig.*
   b) *Urbilder offener Mengen sind offen.*
   c) *Urbilder abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.*
2. *Wenn T stetig ist, dann ist T auch folgenstetig, dass heißt aus $x_n \to x$ folgt $T(x_n) \to T(x)$. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.*

Definition A.0.9 (überdeckungskompakt, folgenkompakt). *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.*

1. *Eine Teilmenge $K \subseteq X$ heißt* (überdeckungs-)kompakt
   $:\Leftrightarrow$ *Jede Überdeckung von K durch offene Mengen aus X besitzt eine endliche Teilüberdeckung.*
2. *Eine Teilmenge $K \subseteq X$ heißt* folgenkompakt
   $:\Leftrightarrow$ *Jede Folge in K besitzt eine konvergente Teilfolge, deren Grenzwert in K liegt.*

Satz A.0.7. *Kompaktheit und Folgenkompaktheit sind im Allgemeinen nicht äquivalent.*

Definition A.0.10 (separabel). *Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt* separabel $:\Leftrightarrow$ *X enthält eine abzählbare dichte Teilmenge.*

Satz A.0.8 (Relativtopologie, Produkttopologie).

1. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $A \subsetneq X$. Dann ist $(A, \mathcal{T}_A)$ ein topologischer Raum mit der sogenannten* Relativtopologie *$\mathcal{T}_A := \{U \cap A \text{ mit } U \in \mathcal{T}\}$.*
2. *Seien $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$, wobei I eine beliebige Indexmenge ist, topologische Räume und sei $X = \bigotimes_{i \in I} X_i$ das kartesische Produkt der Mengen X_i. Dann lässt sich X mit der sogenannten* Produkttopologie *$\mathcal{T}$ versehen, wobei genau dann $U \in \mathcal{T}$ ist, wenn U als Vereinigung von Mengen der Form $(U_i)_{i \in I}$ mit $U_i \in \mathcal{T}_i$ für alle $i \in I$ und $U_i = X_i$ für fast alle $i \in I$ darstellbar ist.*

Satz A.0.9 (Satz von Tychonov). *Seien $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$, wobei I eine beliebige Indexmenge ist, topologische Räume und $X = \bigotimes_{i \in I} X_i$ versehen mit der Produkttopologie. Dann ist X genau dann kompakt, wenn alle X_i kompakt sind.*

Bemerkung 1. *Dieser Satz ist äquivalent zum Auswahlaxiom.*

Literatur

[1] Hans Wilhelm Alt. *Lineare Funktionalanalysis*. 6. Aufl. Springer, 2012.

[2] John B. Conway. *A Course in Functional Analysis*. Springer, 1990.

[3] Harro Heuser. *Funktionalanalysis: Theorie und Anwendung*. 4. Aufl. Teubner, 2006.

[4] Dirk Werner. *Funktionalanalysis*. 7. Aufl. Springer, 2011.

Index