

Funktionalanalysis

WOLF-PATRICK DÜLL

Kurzskript

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	2
1. Grundlegende Räume und Abbildungen in der Funktionalanalysis	3
1.1. Skalarprodukte, Normen und Metriken	3
1.2. Topologie in Skalarprodukträumen, normierten Räumen und metrischen Räumen	10
1.3. Lineare Abbildungen in normierten Räumen	17
1.4. Differentiation und Integration in Banachräumen	19
2. Hilbertraumtheorie	21
2.1. Orthogonale Projektionen	21
2.2. Anwendungen bei elliptischen Randwertproblemen und Einführung von Sobolevräumen	24
2.3. Der Spektralsatz für kompakte, selbstadjungierte Operatoren	30
3. Banachraumtheorie	39
3.1. Der Satz von Hahn-Banach und die Hauptsätze der Banachraumtheorie .	39
3.2. Kompakte Operatoren und adjungierte Operatoren auf Banachräumen .	43
3.3. Lokal konvexe und schwache Topologien	46
Anhang	54
A. Grundlagen der Topologie	54
Literatur	56

Vorwort

Das vorliegende Vorlesungsskript ist entstanden im Rahmen der Vorlesung Funktionalanalysis, die ich im Wintersemester 2012/13 sowie im Wintersemester 2014/15 an der Universität Stuttgart gehalten habe.

Das Vorlesungsskript ist kein offizielles Dokument der Universität Stuttgart. Es kann nicht garantiert werden, dass dieses Dokument ohne jeglichen Fehler ist. Bei Fragen oder dem Auffinden von Fehlern können Sie mir gerne eine Nachricht zukommen lassen, zum Beispiel an:

duell@mathematik.uni-stuttgart.de

Es ist nicht gestattet, dieses Dokument in veränderter Form zu verbreiten oder kommerziell einzusetzen.

Ich danke ganz besonders Frau Christina Koch, die das Manuskript mit \LaTeX gesetzt hat.

Wolf-Patrick Düll

1. Grundlegende Räume und Abbildungen in der Funktionalanalysis

1.1. Skalarprodukte, Normen und Metriken

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Definition 1.1.1 (Skalarproduktraum). Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum. Eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ heißt Skalarprodukt (oder inneres Produkt) auf V , falls gilt:

1. Für alle $\alpha \in \mathbb{K}$ und $x, y, z \in V$ gilt $\langle \alpha x + y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$.
2. Für alle $x, y \in V$ gilt $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.
3. Für alle $x \in V$ gilt $\langle x, x \rangle \geq 0$ sowie $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Wir nennen V zusammen mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ Skalarproduktraum oder Prähilbertraum und schreiben $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Bemerkung 1. Aus den Eigenschaften 1. und 2. folgt für jedes $\alpha \in \mathbb{K}$ und $x, y, z \in V$ die Identität

$$\langle x, \alpha y + z \rangle = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle.$$

Ein Skalarprodukt ist also für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ eine positiv definite, symmetrische Bilinearform und für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ eine positiv definite, hermitesche Sesquilinearform.

Beispiel 1. Folgende Vektorräume bilden mit den zugehörigen Abbildungen Skalarprodukträume:

a) $V = \mathbb{R}^n$, $\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i$ (n -dim. euklidischer Raum mit eukl. Skalarprodukt).

b) $V = \mathbb{C}^n$, $\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$.

c) Folgenräume:

$$V = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \langle x, x \rangle < \infty\}, \langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i;$$

$$V = \{x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \langle x, x \rangle < \infty\}, \langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{\infty} x_i \bar{y}_i.$$

d) Funktionsräume:

$$V = C^0([a, b], \mathbb{R}) \text{ mit } a < b \text{ reell mit } \langle x, y \rangle := \int_a^b x(t)y(t) dt;$$

$$V = C^0([a, b], \mathbb{C}) \text{ mit } a < b \text{ reell mit } \langle x, y \rangle := \int_a^b x(t)\overline{y(t)} dt.$$

Satz 1.1.1 (Ungleichung von Cauchy-Schwarz). Sei X ein Skalarproduktraum und $x, y \in X$, dann gilt:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}.$$

Außerdem gilt für $x, y \in X \setminus \{0\}$ genau dann Gleichheit, wenn x und y linear abhängig sind.

Ein Skalarprodukt kann zur Abstandsmessung verwendet werden.

Definition 1.1.2 (Norm). Sei X ein \mathbb{K} -Vektorraum, eine Abbildung $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Norm, falls gilt:

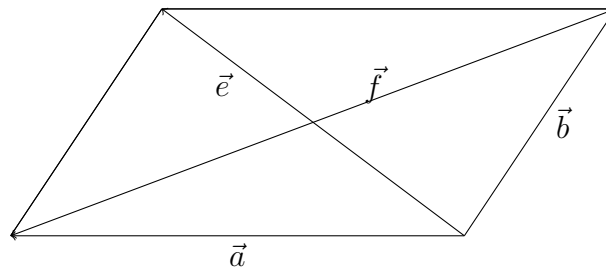
- (1) Für alle $x \in X$ gilt $\|x\| \geq 0$ sowie $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- (2) Für alle $x \in X$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$.
- (3) Für alle $x, y \in X$ gilt die Dreiecksungleichung $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Satz 1.1.2. In jedem Skalarproduktraum X , lässt sich durch $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ eine Norm einführen. Man nennt sie die durch das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induzierte Norm.

Satz 1.1.3 (Parallelogrammgleichung). Sei $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Skalarproduktraum und $\|\cdot\|$ die durch $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induzierte Norm. Dann gilt für alle $x, y \in X$ die Identität

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Diese Identität lässt sich geometrisch veranschaulichen. Dazu betrachten wir zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$, die ein Parallelogramm aufspannen. Ferner betrachten wir die Diagonalen $\vec{e} = \vec{a} - \vec{b}$ und $\vec{f} = \vec{a} + \vec{b}$, es ergibt sich folgende Skizze:



Mit $\xi := \|\vec{\xi}\|$ für $\xi \in \{a, b, e, f\}$ gilt in einem Parallelogramm die Beziehung

$$e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2).$$

Daher ist diese Identität auch als *Parallelogrammgleichung* bekannt.

Mit Hilfe von Skalarprodukten kann man einen Winkelbegriff einführen. Nach der Ungleichung von Cauchy-Schwarz gilt immer:

$$\frac{|\langle x, y \rangle|}{\|x\| \|y\|} \leq 1$$

für $x, y \neq 0$. Dies sichert die Korrektheit der nächsten Definition.

Definition 1.1.3 (Winkel). Sei X ein reeller Skalarproduktraum und seien $x, y \in X \setminus \{0\}$. Dann nennt man $\alpha \in [0, \pi]$ mit

$$\cos \alpha = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}$$

den Winkel zwischen x und y .

Definition 1.1.4 (Orthogonalität). Sei X ein Skalarproduktraum.

- a) $x, y \in X$ heißen orthogonal zueinander, wenn $\langle x, y \rangle = 0$ gilt. Wir verwenden dann die Schreibweise $x \perp y$.
- b) Zwei nichtleere Teilmengen $X_1, X_2 \subseteq X$ heißen orthogonal zueinander, wenn für alle $x \in X_1, y \in X_2$ die Gleichung $\langle x, y \rangle = 0$ erfüllt ist. Wir schreiben dann auch $X_1 \perp X_2$.

Satz 1.1.4 (Pythagoras). Sei X ein Skalarproduktraum und $x, y \in X$ orthogonal zueinander. Dann gilt:

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Definition 1.1.5 (normierter Raum). Ein \mathbb{K} -Vektorraum X zusammen mit einer Norm $\|\cdot\|$ heißt normierter Raum. Wir schreiben dann das Tupel $(X, \|\cdot\|)$.

Bemerkung 2. Nach Satz 1.1.2 ist jeder Skalarproduktraum auch ein normierter Raum. Ein normierter Raum ist aber nicht immer ein Skalarproduktraum. Dazu betrachten wir $X = \mathbb{R}^2$ mit $\|x\| := \max_{k=1,2} |x_k|$ für $x = (x_1, x_2) \in X$. Sei $x = (1, 2)$ und $y = (2, 0)$. Dann ist $\|x\| = \|y\| = 2$, $\|x + y\| = 3$ und $\|x - y\| = 2$. Damit ist aber

$$13 = 9 + 4 = \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 2(4 + 4) = 16$$

und so die Parallelogrammgleichung nicht erfüllt. Daher kann $\|\cdot\|$ nicht von einem Skalarprodukt induziert sein.

Satz 1.1.5. Genau diejenigen normierten Räume X , in denen die Parallelogrammgleichung gilt, sind Skalarprodukträume. Im reellen Fall lässt sich dann durch

$$\langle x, y \rangle := \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

und im komplexen Fall durch

$$\langle x, y \rangle := \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2))$$

ein Skalarprodukt auf X erklären, welches die Norm $\|\cdot\|$ induziert.

Beispiele normierter Räume:

Beispiel 2. Wir betrachten \mathbb{R}^n oder \mathbb{C}^n mit

$$\|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \text{ für } 1 \leq p < \infty$$

oder

$$\|x\|_\infty := \max_{k=1, \dots, n} |x_k|.$$

Hierbei erfolgt der Nachweis der Dreiecksungleichung mit Hilfe der sogenannten Minkowski-Ungleichung:

$$\left(\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

für $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ und $1 \leq p < \infty$. Wir werden diese Ungleichung erst im Rahmen der L^p -Räume in allgemeinerer Form beweisen.

Beispiel 3 (Folgenräume). Wir bezeichnen mit $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ Abbildungen $x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$, $x \mapsto x_n$.

- a) $\ell^p := \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty\}$, $1 \leq p < \infty$ mit $\|x\|_{\ell^p} := (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}}$.
- b) $\ell^\infty := \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \|x\|_{\ell^\infty} < \infty\}$ mit $\|x\|_{\ell^\infty} := \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|$.
- c) $c_0 := \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0\}$ Nullfolgen mit $\|\cdot\|_{\ell^\infty}$.
- d) $c := \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid x \text{ ist eine konvergente Folge}\}$ mit $\|\cdot\|_{\ell^\infty}$.
- e) $c_* = \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid x_k \neq 0 \text{ für höchstens endlich viele } k \in \mathbb{N}\}$ mit $\|\cdot\|_{\ell^p}$, $1 \leq p \leq \infty$.

Beispiel 4 (Funktionsräume). Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^n$ beliebig, $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen (oder allgemeiner lokal kompakt). Dann definieren wir die folgenden Funktionsräume:

- a) $B(M, \mathbb{K}) := \{f: M \rightarrow \mathbb{K} \mid \|f\|_\infty < \infty\}$ mit $\|f\|_\infty := \sup_{x \in M} |f(x)|$ heißt der Raum der beschränkten Funktionen mit Werten in \mathbb{K} . Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ schreiben wir auch $B(M)$ statt $B(M, \mathbb{R})$, ebenso in den folgenden Beispielen.
- b) $C^0(K, \mathbb{K}) := \{f: K \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ stetig}\}$ mit $\|f\|_{C^0} := \sup_{x \in K} |f(x)| = \max_{x \in K} |f(x)|$ heißt der Raum der stetigen Funktionen auf der kompakten Menge K (mit Werten in \mathbb{K}).
- c) $C_b^0(\Omega, \mathbb{K}) := \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ stetig und } \|f\|_{C^0} < \infty\}$ mit $\|f\|_{C^0} := \sup_{x \in \Omega} |f(x)|$ heißt der Raum der beschränkten, stetigen Funktionen auf Ω .
- d) $C_c^0(\Omega, \mathbb{K}) := \{f \in C_b^0(\Omega, \mathbb{K}) \mid \text{supp } f \text{ ist kompakte Teilmenge von } \Omega\}$ mit $\|\cdot\|_{C^0}$ heißt der Raum der beschränkten, stetigen Funktionen mit kompaktem Träger. Dieser ist dabei definiert durch $\text{supp } f := \overline{\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}} = \text{clos}\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}$.
- e) $C_{\text{unif}}^0(\Omega, \mathbb{K}) := BUC(\Omega, \mathbb{K}) := \{f \in C_b^0(\Omega, \mathbb{K}) \mid f \text{ ist gleichmäßig stetig auf } \Omega\}$ mit $\|\cdot\|_{C^0}$ heißt der Raum der beschränkten, gleichmäßig stetigen Funktionen.
- f) $C^{0,\alpha}(\Omega, \mathbb{K}) := \{f \in C_b^0(\Omega) \mid \|f\|_{C^{0,\alpha}} < \infty\}$ für $\alpha \in (0, 1]$ mit der Norm

$$\|f\|_{C^{0,\alpha}} := \|f\|_{C^0} + [f]_{C^{0,\alpha}}$$

und der Halbnorm

$$[f]_{C^{0,\alpha}} := \sup_{\substack{x, y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

heißt der Raum der Hölder-stetigen Funktionen. Für $\alpha = 1$ erhalten wir $C^{0,1}(\Omega, \mathbb{K}) = \text{Lip}(\Omega, \mathbb{K})$, wobei $\text{Lip}(\Omega, \mathbb{K})$ der Raum der Lipschitz-stetigen Funktionen ist.

g) $C^m(K, \mathbb{K}) := \{f: K \rightarrow \mathbb{K} \mid \partial_x^j f \text{ ist stetig auf } K^\circ = \text{int } K \text{ und stetig fortsetzbar auf } K \text{ f\u00fcr } 0 \leq |j| \leq m\}$ mit der Norm

$$\|f\|_{C^m} := \sum_{0 \leq |j| \leq m} \|\partial_x^j f\|_{C^0}$$

he\u00dft Raum der m -fach stetig differenzierbaren Funktionen. Hierbei ist $x = (x_1, \dots, x_n)$, $j = (j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{N}^n$ ein Multiindex, $|j| := \sum_{i=1}^n j_i$ und $\partial_x^j := \partial_{x_1}^{j_1} \dots \partial_{x_n}^{j_n}$ mit $\partial_x^0 f = f$.

h) Analog definiert man $C_b^m(\Omega, \mathbb{K})$ (beschr\u00e4nkt), $C_c^m(\Omega, \mathbb{K})$ (kompakter Tr\u00e4ger) und $C_{\text{unif}}^m(\Omega, \mathbb{K}) := \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{K} \mid \partial_x^j f \in C_{\text{unif}}^0(\Omega, \mathbb{K})\}$ f\u00fcr $|j| = 0, \dots, m$ mit der Norm $\|\cdot\|_{C^m}$.

Au\u00dferdem definieren wir $C^{m,\alpha}(\Omega, \mathbb{K}) := \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{K} \mid \partial_x^j f \in C^0(\Omega, \mathbb{K}) \text{ f\u00fcr } |j| = 0, \dots, m \text{ und } \partial_x^m f \in C^{0,\alpha}(\Omega, \mathbb{K})\}$ f\u00fcr $m \geq 1$ mit

$$\|f\|_{C^{m,\alpha}} = \|f\|_{C^{m-1}} + \sum_{|j|=m} \|\partial_x^j f\|_{C^{0,\alpha}}$$

Definition 1.1.6 (Halbnorm). Sei X ein \mathbb{K} -Vektorraum. Eine Abbildung $[\cdot]: X \rightarrow \mathbb{R}$ hei\u00dft Halbnorm, wenn sie alle Eigenschaften einer Norm erf\u00fcllt, au\u00dfer

$$[x] = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Wir bezeichnen mit $(X, [\cdot])$ dann einen halbnormierten Raum.

Satz 1.1.6. Sei $(X, [\cdot])$ ein halbnormierter Raum. Dann gilt:

- a) $\text{Kern}([\cdot]) := \{x \in X \mid [x] = 0\}$ ist ein Untervektorraum von X .
- b) $X/\text{Kern}([\cdot])$ mit der kanonischen Quotientenvektorraumstruktur und einer Abbildung $\|x + \text{Kern}([\cdot])\| := [x]$ ist ein normierter Raum.

Anmerkung:

Wir schreiben $X/\text{Kern}([\cdot]) = \{\hat{x} \mid x \in X\}$ mit $\hat{x} = x + \text{Kern}([\cdot]) = \{y \in X \mid x \sim y\}$ mit der \u00c4quivalenzrelation $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \text{Kern}([\cdot])$. Dann liefern $\hat{x} + \hat{y} = \widehat{x + y}$ und $\alpha \hat{x} = \widehat{\alpha x}$ die Vektorraumstruktur auf $X/\text{Kern}([\cdot])$ mit Nullelement $0 + \text{Kern}([\cdot])$.

Beispiel 5 (Lebesgue-R\u00e4ume). Sei $(\Omega, \Sigma, \lambda)$ ein Ma\u00dfraum. Hierbei ist $\Omega \subseteq \mathbb{K}^n$, Σ eine σ -Algebra und λ ein Ma\u00df. Wir definieren

$$\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p(\Omega) := \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ ist } (\Sigma, \lambda)\text{-messbar, } [f]_{\mathcal{L}^p} < \infty\}$$

f\u00fcr $1 \leq p \leq \infty$. Ferner k\u00f6nnen wir zwei Halbnormen definieren:

$$[f]_p = [f]_{\mathcal{L}^p} := \left(\int_{\Omega} |f|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{und} \quad [f]_{\infty} = [f]_{\mathcal{L}^{\infty}} := \inf_{\substack{B \in \Sigma \\ \lambda(B)=0}} \left(\sup_{x \in \Omega \setminus B} |f(x)| \right).$$

Dann ist $(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p(\Omega), [\cdot]_{\mathcal{L}^p})$ f\u00fcr $1 \leq p < \infty$ ein halbnormierter Raum. Ferner sei $L_{\mathbb{K}}^p(\Omega) := \mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p(\Omega) / \text{Kern}([\cdot]_p) = \mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p(\Omega) / \{f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p(\Omega) \mid f = 0 \text{ \u00f4. \u00e4.}\}$ und $\|f + \text{Kern}([\cdot]_p)\|_{L^p} := [f]_{\mathcal{L}^p}$. Dann ist $(L_{\mathbb{K}}^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p})$ f\u00fcr $1 \leq p < \infty$ ein normierter Raum und wir auch als Lebesgue-Raum bezeichnet.

Für den Fall $\Omega = \mathbb{N}$, $\Sigma = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ (die Potenzmenge von \mathbb{N}) und λ das Zählmaß (d.h. $\lambda(B) = |B|$ für $B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$) erhalten wir $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p(\mathbb{N}) = L_{\mathbb{K}}^p(\mathbb{N}) = \ell_{\mathbb{K}}^p$.

Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, schreiben wir von nun an $\mathcal{L}^p(\Omega)$ bzw. $L^p(\Omega)$.

Der einzig schwierige Schritt beim Beweis der (Halb)-Normeigenschaften ist der Nachweis der Dreiecksungleichung. Er basiert auf den im Folgenden behandelten Ungleichungen.

Definition 1.1.7 (Konjugierte Zahl). Sei $p \in [1, \infty]$. Dann heißt $p' \in [1, \infty]$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, wobei wir $\frac{1}{\infty} := 0$ setzen, die zu p konjugierte Zahl.

Lemma 1.1.7 (Youngsche Ungleichung). Sei $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ und $p \in (1, \infty)$. Dann gilt:

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}.$$

Satz 1.1.8 (Höldersche Ungleichung). Sei $p \in [1, \infty]$, $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^{p'}(\Omega)$. Dann ist $fg \in L^1(\Omega)$ und es gilt:

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^{p'}}.$$

Satz 1.1.9 (Minkowskische Ungleichung). Sei $p \in [1, \infty]$ und $f, g \in L^p(\Omega)$. Dann ist $f + g \in L^p(\Omega)$ und es gilt:

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$$

Definition 1.1.8 (Metrischer Raum). (X, d) heißt metrischer Raum, falls $X \neq \emptyset$ und $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung bei der die folgenden Eigenschaften für alle $x, y, z \in X$ erfüllt sind:

1. *Positivität:*
 $d(x, y) \geq 0$, sowie $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2. *Symmetrie:*
 $d(y, x) = d(x, y)$.
3. *Dreiecksungleichung:*
 $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Die Abbildung d heißt dann eine Metrik. Erfüllt d die obigen Eigenschaften, außer $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, dann heißt d Halbmetrik und (X, d) halbmetrischer Raum.

Satz 1.1.10.

a) Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann ist durch $d(x, y) := \|x - y\|$ eine Metrik definiert, die folgende zusätzliche Eigenschaften erfüllt:

4. Translationsinvarianz:

Für alle $x, y, z \in X$ gilt $d(x + z, y + z) = d(x, y)$.

5. Homogenität:

Für alle $x, y \in X$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha|d(x, y)$.

b) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Außerdem sei X ein \mathbb{K} -Vektorraum und d translationsinvariant und homogen. Dann ist durch

$$\|x\| := d(x, 0)$$

eine Norm definiert.

Beispiel 6. Sei $X \neq \emptyset$ und

$$d(x, y) := \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y. \end{cases}$$

Dann ist d eine Metrik, die sogenannte diskrete Metrik, welche allerdings, sollte X ein \mathbb{K} -Vektorraum sein, keine Norm induziert.

Bemerkung 3. Wir haben folgende Hierarchie von Strukturen:

Skalarproduktraum \Rightarrow normierter Raum \Rightarrow metrischer Raum,

wobei die Umkehrungen im Allgemeinen falsch sind.

1.2. Topologie in Skalarprodukträumen, normierten Räumen und metrischen Räumen

Definition 1.2.1. Sei (X, d) ein metrischer Raum sowie $A, B, C, M, \mathcal{O}, V, W, Z \subseteq X$, $x_0 \in X$ und $\varepsilon > 0$.

- a) $B_\varepsilon(x_0) := \{x \in X \mid d(x, x_0) < \varepsilon\}$ heißt offener ε -Ball um x_0 . Ist X ein normierter Raum, dann kann in dieser Definition $d(x, x_0)$ durch $\|x - x_0\|$ ersetzt werden.
- b) \mathcal{O} heißt offen, falls für alle $x \in \mathcal{O}$ ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq \mathcal{O}$ existiert.
- c) A heißt abgeschlossen, falls $X \setminus A$ offen ist.
- d) $M^\circ := \{x \in M \mid \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq M\}$ heißt das Innere von M .
- e) $\overline{M} := X \setminus (X \setminus M)^\circ$ heißt Abschluss von M .
- f) $\partial M := \overline{M} \setminus M^\circ$ heißt Rand von M .
- g) B heißt dicht in A , falls $\overline{B} = A$ gilt.
- h) C heißt beschränkt, falls $x \in X$ sowie $R > 0$ existieren, mit $C \subseteq B_R(x)$.
- i) Z heißt zusammenhängend, falls sich Z nicht als disjunkte Vereinigung zweier nichtleerer Mengen der Form $V \cap Z$ und $W \cap Z$, wobei V und W offen sind, darstellen lässt.

Beispiel 7.

- a) Sei $(X, d) = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$. Dann ist $B_1(0) = B_1(0)^\circ$ offen und zusammenhängend. Ferner ist $\overline{B_1(0)} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 \leq 1\}$ abgeschlossen und zusammenhängend. Außerdem gilt: $\partial B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 = 1\}$.
- b) Sei $(X, d) = (\mathbb{R}, \|\cdot\|_2 = |\cdot|)$. Dann ist $M = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}\right]$ nicht zusammenhängend, nicht offen und nicht abgeschlossen. Außerdem ist

$$\partial M = \left\{ \frac{1}{m} \mid m \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\} \cup \{0\}.$$

Wir können M auf der reellen Achse visualisieren:



Definition 1.2.2 (Konvergente Folge). Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (X, d) heißt konvergent gegen $x \in X$ für $n \rightarrow \infty$, falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0 \quad \text{gilt, d.h.} \quad \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n \geq n_\varepsilon : d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Wir schreiben dann auch $x_n \rightarrow x$ für $n \rightarrow \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ oder $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$.

Bemerkung 4. Der Grenzwert einer Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eindeutig bestimmt. Angenommen neben x sei y ein weiterer Grenzwert. Dann erhalten wir mit der Dreiecksungleichung

$$0 \leq d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y).$$

Nun gilt aber nach Definition $d(x, x_n) = d(x_n, x) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ und $d(x_n, y) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ und so ist $d(x, y) = 0$ und es folgt $x = y$.

Beispiel 8. Sei (X, d) ein metrischer Raum.

a) Sei $X = \mathbb{R}^m$ und $d(x, y) = \|x - y\|_2$ sowie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^m$. Wir bezeichnen mit x_j die j -te Komponente von x bzw. mit $(x_n)_j$ die j -te Komponente des Folgenglieds x_n . Dann gilt:

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \Leftrightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^m ((x_n)_i - x_i)^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Leftrightarrow \forall_{i \in \{1, \dots, m\}} : (x_n)_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_i.$$

b) Sei $X = C^0([0, 1])$ sowie $d(x, y) = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - y(t)|$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x &\Leftrightarrow \max_{0 \leq t \leq 1} |x_n(t) - x(t)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ &\Leftrightarrow \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{n_\varepsilon \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_\varepsilon} : \max_{0 \leq t \leq 1} |x_n(t) - x(t)| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{n_\varepsilon \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_\varepsilon} \forall_{t \in [0, 1]} : |x_n(t) - x(t)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Diese Eigenschaft heißt auch gleichmäßige Konvergenz.

c) Sei $X = C^0([0, 1])$ und $d(x, y) = \left(\int_0^1 |x(t) - y(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$ für $1 \leq p < \infty$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x &\Leftrightarrow \left(\int_0^1 |x_n(t) - x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ &\Leftrightarrow \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{n_\varepsilon \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_\varepsilon} \int_0^1 |x_n(t) - x(t)|^p dt < \varepsilon. \end{aligned}$$

Dies nennt man auch Konvergenz im p -ten Mittel.

Satz 1.2.1. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}$, $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$ und $a_n \rightarrow a$ für $n \rightarrow \infty$. Dann gilt:

$$a_n x_n + y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a x + y.$$

Satz 1.2.2. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $M \subseteq X$. Dann gilt

$$\overline{M} = \{x \in X \mid \exists_{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq M} : x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x\}$$

Definition 1.2.3. Seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume.

- Eine Abbildung $T: X \rightarrow Y$ heißt stetig in $x_0 \in X$, wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon, x_0) > 0 \forall x \in X, d_X(x, x_0) < \delta : d_Y(T(x), T(x_0)) < \varepsilon$ gilt.
- T heißt stetig in X , falls T stetig in jedem $x \in X$ ist.
- T heißt Homöomorphismus, falls T stetig und bijektiv ist und die Umkehrabbildung T^{-1} ebenfalls stetig ist.
- T heißt Isomorphismus, falls T stetig, linear, bijektiv und T^{-1} ebenfalls stetig ist.
- T heißt Isometrie, falls T stetig und bijektiv ist und außerdem für alle $x_1, x_2 \in X$ die Identität

$$d_Y(T(x_1), T(x_2)) = d_X(x_1, x_2)$$

gilt.

Satz 1.2.3. Für $T: (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ sind äquivalent:

- T ist stetig für alle $x \in X$.
- T ist folgenstetig für alle $x \in X$, d.h. $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ impliziert $T(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T(x)$.
- $\mathcal{O} \subseteq Y$ ist offen in (Y, d_Y) impliziert $T^{-1}(\mathcal{O})$ ist offen in (X, d_X) .
- $A \subseteq Y$ abgeschlossen in (Y, d_Y) impliziert $T^{-1}(A)$ abgeschlossen in (X, d_X) .

Definition 1.2.4. Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (X, d) heißt Cauchy-Folge, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n, m \geq n_\varepsilon : d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

gilt.

Lemma 1.2.4. Jede konvergente Folge in einem metrischen Raum ist eine Cauchy-Folge.

Vollständigkeit

Definition 1.2.5. Ein metrischer Raum (X, d) heißt vollständig, wenn jede Cauchy-Folge in X gegen ein Element aus X konvergiert. Ein vollständiger, metrischer Raum heißt auch Fréchetraum, ein vollständiger normierter Raum heißt auch Banachraum und ein vollständiger Skalarproduktraum heißt auch Hilbertraum.

Beispiel 9.

- $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ und $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ sind Banachräume.
- $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ ist nicht vollständig. Betrachte dazu eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{2}$. Eine Möglichkeit ist das Setzen von x_n als die Dezimaldarstellung von $\sqrt{2}$ bis zur n -ten Stelle. Dann ist jedes Folgenglied eine endliche Dezimalzahl und so aus \mathbb{Q} , aber der Grenzwert liegt in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Definition 1.2.6. Zwei Normen $\|\cdot\|_a$ und $\|\cdot\|_b$ heißen äquivalent, wenn jede Folge, die bezüglich der Norm $\|\cdot\|_a$ konvergiert, auch bezüglich $\|\cdot\|_b$ konvergiert und umgekehrt.

Satz 1.2.5. In einem endlichdimensionalen \mathbb{K} -Vektorraum X sind alle Normen äquivalent. Insbesondere existieren für je zwei Normen $\|\cdot\|_a$ und $\|\cdot\|_b$ Konstanten $c_1, c_2 > 0$ mit

$$c_1 \|x\|_b \leq \|x\|_a \leq c_2 \|x\|_b$$

für alle $x \in X$.

Korollar 1.2.6. Jeder endlichdimensionale, normierte Raum ist ein Banachraum.

Satz 1.2.7. Alle normierten Räume aus Beispiel 4 außer $C_c^m(\Omega, \mathbb{K})$, $m \geq 0$, sind vollständig.

Satz 1.2.8. Die Räume $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ für $1 \leq p \leq \infty$ sind vollständig also Banachräume. Für $p = 2$ handelt es sich auch um einen Hilbertraum.

Satz 1.2.9. Der Raum $(C^0([0, 1]), \|\cdot\|)$ mit $\|f\| := \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$ ist nicht vollständig.

Satz 1.2.10 (Monotone Konvergenz, Beppo Levi). Sei D eine λ -messbare Menge und seien $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$, $n \in \mathbb{N}$ messbare Funktionen, die für $n \rightarrow \infty$ monoton gegen eine Grenzfunktion f konvergieren. Dann ist auch f λ -messbar und es gilt

$$\int_D f d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_D f_n d\lambda.$$

Satz 1.2.11 (Majorisierte Konvergenz, Lebesgue). Sei D eine λ -messbare Menge und seien $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$, $n \in \mathbb{N}$ messbare Funktionen. Existiert $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ fast überall und existiert eine λ -integrierbare Funktion g mit $|f_n| \leq g$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist f λ -messbar und es gilt

$$\int_D f d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_D f_n d\lambda,$$

sowie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_D |f - f_n| d\lambda = 0.$$

Lemma 1.2.12. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann sind äquivalent:

(i) $(X, \|\cdot\|)$ ist ein Banachraum.

(ii) Jede absolut-konvergente Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ ist auch konvergent, d.h. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_i$ existiert in X .

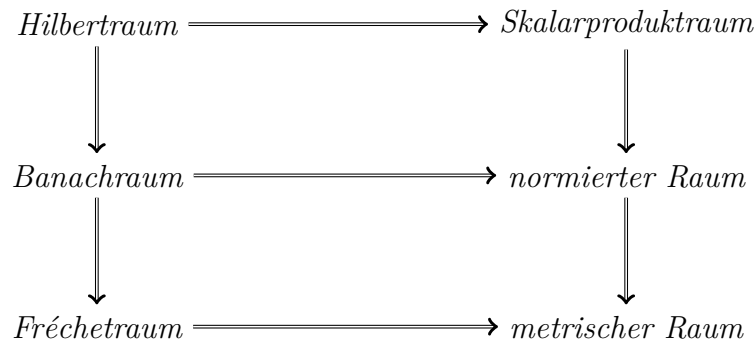
Satz 1.2.13. Die Räume $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p})$ mit $1 \leq p \leq \infty$ sind Banachräume. Ferner ist $(L^2(\Omega), \|\cdot\|_{L^2})$ ein Hilbertraum.

Beispiel 10. $(C_b^\infty(\Omega), d)$ mit

$$d(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\|\frac{d^n}{dx^n} f - \frac{d^n}{dx^n} g\|_{C^0}}{1 + \|\frac{d^n}{dx^n} f - \frac{d^n}{dx^n} g\|_{C^0}}$$

ist ein Fréchetraum.

Bemerkung 5. Wir erhalten eine erweiterte Hierarchie von Strukturen:



Die Umkehrungen gelten dabei im Allgemeinen nicht.

Satz 1.2.14. Jeder normierte Raum $(X, \|\cdot\|_X)$ ist isometrisch isomorph zu einem normierten Raum $(X_*, \|\cdot\|_*)$. Es existiert also eine Abbildung $T: X \rightarrow X_*$, die ein Isomorphismus und eine Isometrie ist, wobei der Raum $(X_*, \|\cdot\|_*)$ ein dichter Teilraum eines Banachraums $(\tilde{X}, \|\cdot\|_{\tilde{X}})$ ist und bis auf isometrische Isomorphie eindeutig ist.

$(\tilde{X}, \|\cdot\|_{\tilde{X}})$ heißt Vervollständigung von $(X, \|\cdot\|_X)$.

Satz 1.2.15. $C_c^m(\Omega)$ ist dicht in $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p})$ für $m \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ und $1 \leq p < \infty$. Damit kann $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p})$ mit der Vervollständigung von $C_c^m(\Omega)$ bezüglich der $\|\cdot\|_{L^p}$ -Norm identifiziert werden.

Satz 1.2.16 (Fixpunktsatz von Banach). Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, sowie $F: X \rightarrow X$ eine Kontraktion, d.h. es existiert ein $\lambda \in (0, 1)$ mit

$$\forall_{x, y \in X} : d(F(x), F(y)) \leq \lambda d(x, y) < d(x, y).$$

Dann besitzt F einen eindeutigen Fixpunkt x^* , d.h. es gilt $F(x^*) = x^*$.

Kompaktheit

Satz 1.2.17. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $K \subseteq X$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) K ist folgenkompakt, d.h. jede Folge in K besitzt eine konvergente Teilfolge, deren Grenzwert in K liegt.
- (ii) K ist kompakt, d.h. jede Überdeckung von K durch offene Mengen aus X besitzt eine endliche Teilüberdeckung. Existiert also $K \subseteq \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$ mit $\mathcal{O}_i \subseteq X$ offen, sowie I beliebige Indexmenge, existieren auch endlich viele $i_1, \dots, i_n \in I$ mit $K \subseteq \bigcup_{j=1}^n \mathcal{O}_{i_j}$.
- (iii) (K, d) ist vollständig und K ist präkompakt, d.h. für alle $\varepsilon > 0$ existiert eine endliche Teilmenge $H \subseteq X$ mit $K \subseteq \bigcup_{x \in H} B_\varepsilon(x)$.

Satz 1.2.18. Jede kompakte Teilmenge eines metrischen Raums ist beschränkt und abgeschlossen.

Lemma 1.2.19 (Riesz). Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $Y \subsetneq X$ ein abgeschlossener Unterraum. Dann gilt:

$$\forall 0 < r < 1 \exists x_r \in X \setminus Y : (\|x_r\| = 1) \wedge (d(x_r, Y) := \inf_{y \in Y} \|x - y\| \geq r)$$

Satz 1.2.20. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) Jede beschränkte und abgeschlossene Teilmenge von X ist kompakt in X .
- (ii) X ist ein endlichdimensionaler Vektorraum.
- (iii) $\overline{B_1(0)}$ ist kompakt in X .

Satz 1.2.21. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $\emptyset \neq K \subseteq X$ kompakt. Dann gibt es zu jedem Punkt $y \in X$ einen Punkt $x_0 \in K$, der von y den kleinsten Abstand hat. Der Punkt x_0 heißt dann beste Approximation oder bestapproximierendes Element von y in K .

Bemerkung 6. In nicht kompakten Mengen gibt es im Allgemeinen kein bestapproximierendes Element. Beispielsweise für $y = -1$ in

$$M_1 = (0, 1] \quad \text{oder} \quad M_2 = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1} \right].$$

Satz 1.2.22 (Arzelà, Ascoli). Sei (K, d) ein kompakter, metrischer Raum sowie $A \subseteq C^0(K, \mathbb{K})$. Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) A ist relativ kompakt in $C^0(K, \mathbb{K})$, d.h. \overline{A} ist kompakt in $C^0(K, \mathbb{K})$.
- (ii) A ist beschränkt (d.h. $c := \sup_{f \in A} \|f\|_{C^0} < \infty$) und gleichgradig stetig. Letzteres bedeutet, dass für alle $x \in K$ und alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta(x) > 0$ existiert, so dass für alle $f \in A$ und alle $y \in B_{\delta(x)}(x)$ die Ungleichung $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ gilt.

Bemerkung 7. Da K kompakt ist, gilt $C^0(K, \mathbb{K}) = C_{\text{unif}}^0(K, \mathbb{K})$, wodurch $\delta(x)$ unabhängig von x gewählt werden kann. Sei dazu $\varepsilon > 0$ zu $x \in K$ und wähle $\delta(x)$ wie in Satz 1.2.21(ii). Wegen Kompaktheit von K , existieren $x_1, \dots, x_n \in K$ mit $K \subseteq \bigcup_{k=1}^n B_{\frac{\delta(x_k)}{2}}(x_k)$ mit $\delta(x_k)$ wie in Satz 1.2.21 (ii). Definiere nun $\delta := \min_{1 \leq k \leq n} \frac{\delta(x_k)}{2}$, dann gilt wegen Existenz eines k mit $x \in B_{\frac{\delta(x_k)}{2}}(x_k)$ und $y \in B_{\delta(x_k)}(x_k)$ auch

$$\forall y \in B_{\delta}(x) : |f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(y)| < 2\varepsilon$$

Beispiel 11. Sei $A = B_1(0)$ in $(C^1([-1, 1]), \|\cdot\|_{C^1})$. Wegen $\|f\|_{C^0} \leq \|f\|_{C^1} \leq 1$ ist A beschränkt, sowie via

$$\forall f \in A : |f(x) - f(y)| \leq \sup_{\xi \in [-1, 1]} |f'(\xi)| \cdot |x - y| \leq |x - y|$$

auch gleichgradig stetig. Damit ist A relativ kompakt in $(C^0([-1, 1]), \|\cdot\|_{C^0})$.

Satz 1.2.23 (Fréchet, Kolmogorov, Riesz). Sei $1 \leq p < \infty$. Dann ist $A \subseteq L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ genau dann relativ kompakt, wenn die folgenden drei Eigenschaften erfüllt sind:

- (i) $\sup_{f \in A} \|f\|_{L^p}$ ist endlich.
- (ii) Für ein $h \in \mathbb{R}^n$, $|h| \rightarrow 0$ gilt $\sup_{f \in A} \|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_{L^p} \rightarrow 0$.
- (iii) Es gilt $\sup_{f \in A} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n \setminus B_R(0))} \rightarrow 0$ für $R \rightarrow \infty$.

1.3. Lineare Abbildungen in normierten Räumen

Satz 1.3.1. Seien $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ normierte Räume und sei $T: E \rightarrow F$ eine lineare Abbildung. Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent:

- (i) T ist stetig für alle $x \in E$.
- (ii) T ist stetig in 0.
- (iii) Für eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E$ mit $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ folgt $Tx_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.
- (iv) Es existiert ein $\alpha \geq 0$ mit $TB_E \subseteq \alpha B_F$. Dabei ist $B_E := \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$ und $\alpha B_F := \{y \in F \mid \|y\| \leq \alpha\}$.
- (v) T ist beschränkt, d.h., es existiert ein $\beta \geq 0$ mit $\|Tx\|_F \leq \beta \|x\|_E$ für alle $x \in E$.

Definition 1.3.1 (Dualraum). Sei E ein \mathbb{K} -Vektorraum und $(E, \|\cdot\|_E)$ ein normierter Raum. Dann heißt $E' := \{T: E \rightarrow \mathbb{K} \mid T \text{ linear und stetig}\}$ der Dualraum von E .

Beispiel 12.

a) Sei $E = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$, $F = (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_2)$ für $n, m \in \mathbb{N}$. Dann sind alle linearen Abbildungen $T: E \rightarrow F$ stetig und können durch Matrizen dargestellt werden. Dasselbe gilt auch für alle anderen Normen, wegen der Äquivalenz von Normen.

b) Sei $E = (C^0([a, b]), \|\cdot\|_{C^0})$ sowie $T: E \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$Tf = \int_a^b f(s) ds, \quad (-\infty < a \leq b < \infty).$$

Die Abbildung T ist stetig, linear und damit im Dualraum E' enthalten. Außerdem ist $V: E \rightarrow F$ definiert durch

$$Vf(t) = \int_a^t f(s) ds \quad \text{für } t \in [a, b]$$

linear und stetig, denn es gilt $\|Vf\|_{C^0} \leq (b-a) \cdot \|f\|_{C^0}$. Ferner ist V stetig als Abbildung von $(C^0([a, b]), \|\cdot\|_{C^0})$ nach $(C^1([a, b]), \|\cdot\|_{C^1})$.

Definition 1.3.2 (Raum der stetigen linearen Operatoren). Seien E und F normierte Räume. Wir definieren

$$\text{Lin}(E, F) := \{T: E \rightarrow F \mid T \text{ ist linear und stetig}\}$$

und bezeichnen diese Menge als den Raum der stetigen linearen Operatoren.

Satz 1.3.2. Sei $T \in \text{Lin}(E, F)$, sowie

$$\|T\| := \sup_{x \in B_E} \|Tx\|_F = \sup_{x \in B_E^\circ} \|Tx\|_F = \sup_{x \in \partial B_E} \|Tx\|_F = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E}.$$

Dann ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\text{Lin}(E, F)$, die sogenannte Operatornorm. Ist F vollständig, dann ist auch $(\text{Lin}(E, F), \|\cdot\|)$ vollständig. Insbesondere ist der Dualraum E' vollständig.

Beispiel 13. Sei $\psi \in C^0([0, 1] \times [0, 1])$. Dann ist

$$T: f \mapsto Tf \quad \text{mit} \quad Tf(x) = \int_0^1 \psi(x, y)f(y) \, dy$$

eine stetige, lineare Abbildung und es gilt

$$\|T\| = \sup_{x \in [0, 1]} \int_0^1 |\psi(x, y)| \, dy.$$

Lemma 1.3.3. Seien E, F, G normierte Räume und $B \in \text{Lin}(E, F)$, $A \in \text{Lin}(F, G)$, dann gilt:

(i) $A \circ B \in \text{Lin}(E, G)$ und $\|A \circ B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

(ii) Die Abbildungen $M_r: \text{Lin}(E, F) \rightarrow \text{Lin}(E, G), T \mapsto A \circ T$ und $M_\ell: \text{Lin}(F, G) \rightarrow \text{Lin}(E, G), S \mapsto S \circ B$ sind linear und stetig. Ferner gilt

$$\|M_r\| \leq \|A\| \quad \text{und} \quad \|M_\ell\| \leq \|B\|.$$

Satz 1.3.4. Sei E ein Banachraum und $T \in \text{Lin}(E, E)$ mit $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} < 1$ (zum Beispiel, falls $\|T\| < 1$ ist). Dann ist $\text{Id} - T$ bijektiv und es gilt

$$(\text{Id} - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n \in \text{Lin}(E, E)$$

und die Reihe konvergiert bezüglich der Operatornorm. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$ heißt Neumannsche Reihe und verallgemeinert die geometrische Reihe.

Satz 1.3.5.

a) Sei $E = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$, $A \in \text{Lin}(E, E)$ beschrieben durch die $n \times n$ -Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$. Dann kann die zugehörige Operatornorm berechnet werden durch

$$\|A\| = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|.$$

Die Operatornorm heißt dann auch Zeilensummennorm $\|A\|_\infty$.

b) Sei $E = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ mit $A \in \text{Lin}(E, E)$. Dann kann die zugehörige Operatornorm berechnet werden durch

$$\|A\| = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|.$$

Die Operatornorm heißt dann auch Spaltensummennorm $\|A\|_1$.

c) Sei $E = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$, $A \in \text{Lin}(E, E)$, Dann sei die zugehörige Operatornorm gleich der Wurzel aus dem größten Eigenwert der Matrix $A^t A$. Die Operatornorm heißt dann auch Spektralnorm $\|A\|_2$.

1.4. Differentiation und Integration in Banachräumen

Definition 1.4.1. Seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banachräume, $U \subseteq X$ offen und $F: X \rightarrow Y$ eine Abbildung.

- a) F heißt Gâteaux-differenzierbar, wenn die sogenannte Gâteaux-Ableitung $DF(x)[v]$ von F an der Stelle x in Richtung $v \in X$, welche definiert ist durch

$$DF(x)[v] := \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{F(x + hv) - F(x)}{h}$$

wobei $h \in \mathbb{R}$ für alle $v \in X$ existiert.

- b) F heißt Fréchet-differenzierbar in $x \in U$, wenn eine stetige, lineare Abbildung $JF(x): X \rightarrow Y$ existiert, so dass

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\|F(x + h) - F(x) - JF(x)[h]\|_Y}{\|h\|_X} = 0$$

gilt, wobei $h \in X$ ist.

Bemerkung 8.

- a) Die Gâteaux-Ableitung ist die Verallgemeinerung der Richtungsableitung aus der reellen Differentialrechnung. Die Fréchet-Differenzierbarkeit ist die Verallgemeinerung der totalen Differenzierbarkeit aus der reellen Differentialrechnung.
- b) Sei $X = \mathbb{R}$, dann gilt $JF(x) = DF(x)[1]$, d.h. $JF(x)[v] = vDF(x)[1]$ für alle $v \in \mathbb{R}$.

Bemerkung 9. Mit Hilfe der Begriffe der Gâteaux-Differenzierbarkeit und der Fréchet-Differenzierbarkeit lassen sich zentrale Sätze aus der reellen Differentialrechnung, z.B. der Satz von Taylor, der Satz über die implizite Funktion oder die Sätze über Extremstellen (mit und ohne Nebenbedingungen) auf den Fall von Banachräumen verallgemeinern.

Definition 1.4.2. Sei $a, b \in \mathbb{R}$, $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum und $f: [a, b] \rightarrow X$ eine Abbildung.

- a) Sei $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ mit $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ und $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ mit $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Dann heißt $S(f, P, \xi) := \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})f(\xi_k)$ Riemannsumme von f zur Partition P .
- b) Die Abbildung f heißt Riemann-integrierbar, wenn der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} S(f, P(n), \xi(n))$ für alle Folgen $(P(n), \xi(n))_{n \in \mathbb{N}}$ von Partitionen $P(n)$ und n -Tupeln $\xi(n)$, $n \in \mathbb{N}$ für die $\lim_{n \rightarrow \infty} |P(n)| = 0$ gilt, wobei $|P| := \max\{x_k - x_{k-1} \mid 1 \leq k \leq n\}$ die Feinheit der Partition ist, existiert. In diesem Fall nennt man

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{|P| \rightarrow 0} S(f, P, \xi)$$

das Riemann-Integral über f von a bis b .

Bemerkung 10. *Mit Hilfe dieses Integralbegriffs, lassen sich zentrale Sätze aus der reellen Integralrechnung auf den Fall von Banachräumen verallgemeinern. Zum Beispiel erhält man den folgenden Satz:*

Sei $a, b \in \mathbb{K}$ und $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum. Dann ist jede stetige Funktion $f: [a, b] \rightarrow X$ Riemann-integrierbar.

Ferner lässt sich mit Hilfe dieses Integralbegriffs der lokale Existenz- und Eindeutigkeitsatz von Picard-Lindelöf auf den Fall von gewöhnlichen Differentialgleichungen mit Werten in Banachräumen verallgemeinern.

2. Hilbertraumtheorie

2.1. Orthogonale Projektionen

Satz 2.1.1. Sei H ein Hilbertraum und $A \subseteq H$ abgeschlossen, nichtleer und konvex (d.h. $x, y \in A$ impliziert $\lambda x + (1 - \lambda)y \in A$ für alle $\lambda \in [0, 1]$). Dann existiert zu jedem $x_0 \in H$ genau ein $y_0 \in A$ mit $\|x_0 - y_0\| = \inf_{y \in A} \|x_0 - y\|$.

Satz 2.1.2. Sei M ein Untervektorraum eines Hilbertraums H . Dann ist $y_0 \in M$ genau dann bestapproximierend an ein Element $x_0 \in H$, wenn $\langle x_0 - y_0, y \rangle = 0$ für alle $y \in M$ gilt. y_0 heißt dann orthogonale Projektion von x_0 auf M .

Theorem 2.1.3 (Projektionssatz). Sei M ein abgeschlossener Unterraum eines Hilbertraums H . Dann existieren zu $x_0 \in H$ genau zwei Punkte $y_0 \in M$ und $y_1 \in M^\perp := \{y \in H \mid \forall x \in M \langle y, x \rangle = 0\}$, so dass $x_0 = y_0 + y_1$ gilt. Das bedeutet $H = M \oplus M^\perp$ ist die direkte Summe von M und M^\perp .

Korollar 2.1.4. Zu jedem abgeschlossenen Unterraum M eines Hilbertraums H mit $M \neq H$, existiert ein $z_0 \in H$ mit $z_0 \neq 0$ und $z_0 \perp M$.

Definition 2.1.1. Sei $I \neq \emptyset$ beliebige Indexmenge und $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Skalarprodukt-raum. Eine Familie $(e_i)_{i \in I}$, $e_i \in E$ heißt Orthonormalsystem (kurz: ONS), falls für alle $i, j \in I$

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j} \quad \text{mit} \quad \delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

gilt.

Lemma 2.1.5. Sei $(e_i)_{i \in I}$ ein endliches Orthonormalsystem in E . Dann liefert die Zuordnung $P_I: x \mapsto \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i$ die orthogonale Projektion von x auf $E_I := \text{span}\{e_i \mid i \in I\}$ und es gilt für alle $x \in E$ die Identität

$$\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2 + \|x - P_I(x)\|^2.$$

Außerdem sind die $(e_i)_{i \in I}$ linear unabhängig.

Lemma 2.1.6 (Besselsche Ungleichung). Sei $(e_i)_{i \in I}$ ein abzählbares Orthonormalsystem in $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, dann gilt für alle $x \in E$ die Ungleichung

$$\sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Bemerkung 11. Man kann die Gültigkeit der Besselschen Ungleichung auch allgemeiner für beliebige Orthonormalsysteme beweisen.

Satz 2.1.7. Für jedes Orthonormalsystem $(e_i)_{i \in I}$ mit $I \subseteq \mathbb{N}$ in einem Skalarproduktraum $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (1) $\text{span}\{e_i \mid i \in I\}$ ist dicht in E .
- (2) Für alle $x \in E$ gilt $x = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i$.
- (3) Für alle $x \in E$ gilt Gleichheit in der Besselschen Ungleichung, d.h.

$$\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2.$$

Diese Identität ist auch als Parsevalsche Gleichung bekannt.

Ist E zusätzlich ein Hilbertraum, so sind die obigen drei Aussagen äquivalent zu

- (4) Das Orthonormalsystem $(e_i)_{i \in I}$ ist maximal, d.h. es gibt kein $y \in E$, $y \notin \{e_i \mid i \in I\}$, $y \neq 0$ mit $\langle y, e_i \rangle = 0$ für alle $i \in I$.

Definition 2.1.2. Eine Teilmenge T eines metrischen Raums M heißt separabel, falls eine endliche oder abzählbar unendliche Teilmenge A von M existiert, die dicht in T ist.

Satz 2.1.8. H ist genau dann ein separabler Hilbertraum, wenn H ein maximales, abzählbares Orthonormalsystem besitzt.

Beispiel 14. Sei $H_1 = L^2([0, 2\pi], \mathbb{R})$. Dann ist $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, g_1, h_1, g_2, h_2, \dots \right\}$ mit $g_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx)$ und $h_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx)$ für $n \in \mathbb{N}$ ein maximales, abzählbares Orthonormalsystem. Außerdem gilt für alle $f \in H_1$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt \right) \cos(nx) \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt \right) \sin(nx), \end{aligned}$$

wobei die Reihen bezüglich der L^2 -Norm konvergieren. Für einen Beweis siehe [1].

Sei $H_2 = L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$. Dann ist $\left\{ f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ ein maximales, abzählbares Orthonormalsystem und es gilt für alle $f \in H_2$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt \right) e^{inx},$$

wobei die Reihe ebenfalls bezüglich der L^2 -Norm konvergiert.

Bemerkung 12. Jede lineare Abbildung $\ell: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ lässt sich durch eine Matrix $L = (L_1 | L_2 | \dots | L_n)$ darstellen und es gilt

$$\ell(x) = (L_1 | L_2 | \dots | L_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\rangle$$

mit $L_i \in \mathbb{R}$ für $i \in \{1, \dots, n\}$.

Theorem 2.1.9 (Rieszscher Darstellungssatz). Sei H ein Hilbertraum. Dann existiert zu jedem $\ell \in H'$ genau ein $z \in H$ so, dass folgende Eigenschaften erfüllt sind:

1. $\ell(x) = \langle x, z \rangle$ für alle $x \in H$.

2. $\underbrace{\|\ell\|}_{\text{Operatornorm}} = \underbrace{\|z\|}_{\text{Norm in } H}$.

Korollar 2.1.10. Sei H ein Hilbertraum über \mathbb{K} und $R_H: H \rightarrow H'$ sei definiert durch

$$R_H: y \mapsto R_H(y)(x) = \langle x, y \rangle$$

für alle $x, y \in H$. Dann ist J für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ isometrischer Isomorphismus und für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ein isometrischer, konjugiert linearer Isomorphismus, d.h., R_H ist eine Isometrie sowie konjugiert linear. Also gilt insbesondere für alle $y_1, y_2 \in H$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ die Identität

$$R_H(y_1 + \alpha y_2)(x) = R_H(y_1)(x) + \bar{\alpha} R_H(y_2)(x)$$

und R_H^{-1} ist stetig.

Satz 2.1.11. Sei H ein Hilbertraum, $y \in H$ und $\ell \in H'$. Dann gilt

$$\forall_{x \in H} \ell(x) = \langle x, y \rangle$$

genau dann, wenn

$$\frac{1}{2} \langle y, y \rangle - \operatorname{Re}(\ell(y)) = \min_{x \in H} \left(\frac{1}{2} \langle x, x \rangle - \operatorname{Re}(\ell(x)) \right).$$

Theorem 2.1.12 (Lax-Milgram). Sei H ein Hilbertraum über \mathbb{K} und $a: H \times H \rightarrow \mathbb{K}$ sei sesquilinear. Außerdem gebe es Konstanten c_0, C_0 mit $0 < c_0 < C_0 < \infty$, so dass für alle $x, y \in H$ die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

(i) Stetigkeit von a : $|a(x, y)| \leq C_0 \|x\| \cdot \|y\|$.

(ii) Koerzivität von a : $\operatorname{Re}(a(x, x)) \geq c_0 \|x\|^2$.

Dann existiert zu jedem $\ell \in H'$ genau ein $z \in H$ mit

1. Für alle $y \in H$ gilt $a(y, z) = \ell(y)$.

2. $\|z\| \leq \frac{1}{c_0} \|\ell\|$.

Außerdem existiert genau eine Abbildung $A: H \rightarrow H$, mit $a(y, x) = \langle y, Ax \rangle$ für alle $x, y \in H$. Des Weiteren ist A linear und stetig sowie invertierbar mit $\|A\| \leq C_0$ und $\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{c_0}$.

2.2. Anwendungen bei elliptischen Randwertproblemen und Einführung von Sobolevräumen

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Normalgebiet und $f \in C^0(\overline{\Omega})$. Wir definieren das *Energie-Funktional*

$$E(w) := \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla w|^2 - fw \, dx$$

sowie die Menge $A_g = C_g^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ mit $g \in C^0(\partial\Omega)$ und $C_g^1(\overline{\Omega}) = \{w \in C^1(\overline{\Omega}) \mid w|_{\partial\Omega} = g\}$.

Wir suchen ein Minimum von E auf A_g . Dieses Minimierungsproblem hat viele physikalische Interpretationen. Beispiele sind eingespannte Membrane, elektrische Potentiale oder stationäre Temperaturverteilungen.

Satz 2.2.1. *Sei $u \in A_g$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) $E(u) = \min_{w \in A_g} E(w)$.

(2) u erfüllt für alle $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ die Identität

$$\int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle - f\varphi \, dx = 0.$$

(3) u löst die Poissongleichung $-\Delta u = f$ in Ω mit der (inhomogenen) Dirichlet-Randbedingung $u = g$ auf $\partial\Omega$.

Bemerkung 13. *Notwendige Bedingung für die Existenz einer Lösung u von (3) in Satz 2.2.1 ist die Existenz einer Funktion $u_g \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ mit $u_g|_{\partial\Omega} = g$ (das ist unter geeigneten Voraussetzungen an die Regularität von g und $\partial\Omega$ möglich). Existiert eine solche Funktion u_g , dann ist (3) äquivalent zu*

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{u} = \tilde{f}, & \text{in } \Omega \\ \tilde{u} = 0, & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

mit $\tilde{u} = u - u_g$ und $\tilde{f} = f + \Delta u_g$. Daher genügt es, dass wir im folgenden homogene Dirichlet-Randbedingungen, also $g = 0$ betrachten.

Nun zur Frage der Existenz eines Minimums:

Satz 2.2.2 (Poincaré-Ungleichung). *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, das zwischen zwei Parallelen, die zueinander den Abstand d haben, liegt. Dann gilt für alle $u \in C_0^1(\overline{\Omega})$:*

$$\|u\|_{L^2} \leq \frac{d}{\sqrt{2}} \|\nabla u\|_{L^2}$$

mit $\|\nabla u\|_{L^2} = (\sum_{i=1}^n \|\partial_{x_i} u\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}$.

Lemma 2.2.3. *E ist auf A_0 nach unten beschränkt.*

Bemerkung 14. *Da E auf A_0 nach unten beschränkt ist, existiert eine Minimalfolge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A_0$. Wegen der Konvergenz von A_0 lässt sich analog zum Beweis von 2.1.1 mit Hilfe der Parallelogrammgleichung zeigen, dass für $i \in \{1, \dots, n\}$ die Folgen $(\partial_{x_i} u_n)_{n \in \mathbb{N}}$*

Cauchy-Folgen bezüglich der L^2 -Norm sind. Nun ist wegen der Poincaré-Ungleichung auch $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge bezüglich der L^2 -Norm, bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{H^1}$ mit $\|f\|_{H^1} = \|f\|_{L^2} + \|\nabla f\|_{L^2}$ sowie bezüglich der in diesem Fall zu $\|\cdot\|_{H^1}$ äquivalenten Norm $\|\cdot\|_{H_0^1}$ mit $\|f\|_{H_0^1} = \|\nabla f\|_{L^2}$.

A_0 ist allerdings bezüglich dieser Normen nicht vollständig. Wegen der Vollständigkeit von L^2 existiert aber zumindest $u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \in L^2$ bezüglich der L^2 -Norm. Außerdem existieren " $\partial_{x_i} u$ " := $\lim_{n \rightarrow \infty} \partial_{x_i} u_n \in L^2$ bezüglich der L^2 -Norm. Allerdings muss u im Allgemeinen keine partiellen Ableitungen besitzen.

Zwischen u und den " $\partial_{x_i} u$ " besteht folgende Beziehung:

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) : \int_{\Omega} \partial_{x_i} u \varphi \, dx = - \int_{\Omega} u \partial_{x_i} \varphi \, dx.$$

Definition 2.2.1 (Sobolev-Räume).

a) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $m \in \mathbb{N}$ und $1 \leq p \leq \infty$. Dann heißt der Vektorraum

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ f \in L^p(\Omega) \mid \forall \text{Multiindizes } s, |s| \leq m \exists f^{(s)} \in L^p(\Omega) : f^{(0)} = f \wedge \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) : \int_{\Omega} (\partial_x^s \varphi) f \, dx = (-1)^{|s|} \int_{\Omega} \varphi f^{(s)} \, dx \right\}$$

Sobolev-Raum der Ordnung m mit Exponent p . Für $p = 2$ schreibt man auch $H^m(\Omega)$ statt $W^{m,2}(\Omega)$.

Wir versehen $W^{m,p}(\Omega)$ mit der Norm $\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \sum_{|s| \leq m} \|f^{(s)}\|_{L^p(\Omega)}$. Für $p = 2$ schreibt man auch $\|\cdot\|_{H^m(\Omega)}$ statt $\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}$.

b) Die Funktionen $f^{(s)}$ für $|s| \geq 1$ heißen schwache Ableitungen von f und werden mit $\partial_x^s f := f^{(s)}$ bezeichnet.

c) Der Raum $W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}}$ für $1 \leq p < \infty$ heißt Sobolevraum mit (verallgemeinerten) Nullrandwerten der Ordnung m mit Exponent p . Für $p = 2$ schreibt man auch $H_0^m(\Omega)$ statt $W_0^{m,p}(\Omega)$.

Satz 2.2.4.

a) Alle schwachen Ableitungen sind eindeutig bestimmt.

b) Besitzt $f \in W^{m,p}(\Omega)$ eine partielle Ableitung $\partial_x^s f$ mit $|s| \leq m$, so stimmt $\partial_x^s f$ (modulo einer Nullmenge) mit der schwachen Ableitung $f^{(s)}$ überein. Dies rechtfertigt die Notation $\partial_x^s f = f^{(s)}$.

Lemma 2.2.5 (Verallgemeinertes Fundamentallemma der Variationsrechnung).

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in L^1(\Omega)$, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

a) Für alle $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ gilt $\int_{\Omega} f \varphi \, dx = 0$.

b) Es gilt $f = 0$ fast überall.

Satz 2.2.6.

- a) $(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)})$ sind Banachräume, $(H^m(\Omega), \|\cdot\|_{H^m(\Omega)})$ sind Hilberträume.
- b) Für $1 \leq p < \infty$ sind die Räume $W^{m,p}(\Omega)$ bzw. $H^m(\Omega)$ separabel.
- c) $(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)})$ bzw. $(H^m(\Omega), \|\cdot\|_{H^m(\Omega)})$ sind modulo isometrischen Isomorphismus die Vervollständigungen von $\{f \in C^\infty(\Omega) \mid \|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} < \infty\}$ bzw. $\{f \in C^\infty(\Omega) \mid \|f\|_{H^m(\Omega)} < \infty\}$.
- d) Für $1 \leq p < \infty$ und für alle $f \in W^{m,p}(\Omega)$ existieren $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq W^{m,p}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_{W^{m,p}(\Omega)} = 0.$$

Satz 2.2.7 (Verallgemeinerte Poincaré-Ungleichung). Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, das zwischen zwei parallelen Hyperebenen mit Abstand d liegt. Dann gilt

$$\forall u \in H_0^1(\Omega) : \|u\|_{L^2} \leq \frac{d}{\sqrt{2}} \|\nabla u\|_{L^2}$$

mit $\|\nabla u\|_{L^2} = (\sum_{i=1}^m \|\partial x_i u\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}$ (schwacher Gradient).

Korollar 2.2.8. Die Normen $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ und $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ sind auf $H_0^1(\Omega)$ äquivalent, falls Ω die Voraussetzungen des vorherigen Satzes erfüllt. Dabei ist $\|f\|_{H_0^1(\Omega)} := \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}$.

Satz 2.2.9. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Normalgebiet, $f \in L^2(\Omega)$ und

$$E(w) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla w|^2 - fw \, d\lambda.$$

Dann besitzt E auf $H_0^1(\Omega)$ eine eindeutige Minimalstelle u und u ist eindeutige schwache Lösung des Dirichlet-Problems für die Poisson-Gleichung $-\Delta u = f$, es gilt also

$$\forall \varphi \in H_0^1(\Omega) : \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi - f\varphi \, d\lambda = 0.$$

Wir möchten nun unsere Lösung auf elliptische Randwertprobleme verallgemeinern. Sei dazu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Normalgebiet. Gesucht sind Funktionen $u \in C^2(\Omega)$, welche die elliptische Differentialgleichung

$$-\sum_{i=1}^n \partial x_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \partial x_j u + h_i \right) + bu + f = 0 \quad (\text{I})$$

in Ω lösen. Dabei seien $a_{ij}, h_i \in C^1(\Omega)$ für $i, j = 1, \dots, n$ und $f, b \in C^0(\Omega)$ sowie die Matrix $(a_{ij}(x))_{i,j}$ gleichmäßig elliptisch in x , d.h. es existiert ein $c_0 > 0$ so, dass für alle $x \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}^n$ die Ungleichung

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq c_0 |\xi|^2$$

erfüllt ist. Dabei beschreibt für jedes $c > 0$ die Menge der Punkte $\xi \in \mathbb{R}^n$, für die $\sum_{i,j} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j = c$ gilt, eine Ellipse. Die Matrix $(a_{ij}(x))_{i,j}$ kann unsymmetrisch sein. Solche elliptischen Differentialgleichungen sind ohne zusätzliche Bedingungen nicht eindeutig lösbar. Meistens erhält man eindeutige Lösbarkeit durch Einführung von Randbedingungen. Die beiden häufigsten Randbedingungen, die in der mathematischen Physik vorkommen, sind

1. Dirichlet-Randbedingungen:

$$\begin{cases} u \text{ löst } (I) \text{ auf } \Omega, \\ u = g \text{ auf } \partial\Omega, \quad g \in C^0(\partial\Omega). \end{cases}$$

2. Neumann-Randbedingungen:

$$\begin{cases} u \text{ löst } (I) \text{ auf } \Omega, \\ -\sum_{i=1}^n \nu_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \partial_{x_j} u + h_i \right) = g \text{ auf } \partial\Omega, \quad g \in C^0(\partial\Omega), \end{cases}$$

wobei $\nu = (\nu_i)_{i=1,\dots,n}$ die äußeren Normaleneinheitsvektoren an $\partial\Omega$ sind.

Wie bei der Poissongleichung, führen wir auch hier schwache Lösungsbegriffe ein. Sei nun $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ und erfülle gleichmäßige Elliptizitätsbedingungen fast überall auf Ω , $b \in L^\infty$ und $h_i, f \in L^2(\Omega)$. Aus denselben Gründen wie bei der Poissongleichung genügt es, wenn wir den Fall $g = 0$ untersuchen.

- $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *schwache Lösung des Dirichlet-Problems*, falls $u \in H_0^1(\Omega)$ und

$$\forall \varphi \in H_0^1(\Omega) : \int_{\Omega} \left(\sum_i \partial_{x_i} \varphi \left(\sum_j a_{ij} \partial_{x_j} u + h_i \right) + \varphi(bu + f) \right) d\lambda = 0$$

gilt.

- $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *schwache Lösung des Neumann-Problems*, falls $u \in H^1(\Omega)$ und

$$\forall \varphi \in H^1(\Omega) : \int_{\Omega} \left(\sum_i \partial_{x_i} \varphi \left(\sum_j a_{ij} \partial_{x_j} u + h_i \right) + \varphi(bu + f) \right) d\lambda = 0$$

gilt.

Zusätzlich setzen wir $b \geq 0$ für das Dirichlet-Problem und $b \geq b_0 > 0$ für das Neumann-Problem voraus.

Satz 2.2.10.

- *Unter den gesamten obigen Voraussetzungen existiert genau eine schwache Lösung des Dirichlet-Problems.*
- *Unter den gesamten obigen Voraussetzungen existiert genau eine schwache Lösung des Neumann-Problems.*

Bemerkung 15. *Unter zusätzlichen Regularitätsannahmen an die Daten a_{ij} , h_i , b , f und $\partial\Omega$ kann man zeigen, dass die schwache Lösung so regulär ist, dass sie auch eine klassische Lösung ist. Wählt man beispielsweise $a_{ij} \in C^{m,1}(\Omega)$, $h_i \in H^{m+1}$, $f \in H^m$ und ist $\partial\Omega$ lokal als Graph von C^{m+1} -Funktionen darstellbar, erhält man $u \in H^{m+2}(\Omega)$ und damit für hinreichend großes m (in Abhängigkeit von n) auch $u \in C^2(\Omega)$.*

Für nähere Details sei auf die elliptische Regularitätstheorie (L^2 -Theorie, L^p -Theorie, $C^{0,\alpha}$ -Theorie) verwiesen. In einigen Fällen werden dabei die Sobolevschen Einbettungssätze verwendet.

Wir werden nun noch kurz auf die Möglichkeiten der endlich-dimensionalen Approximation von Lösungen der elliptischen Randwertprobleme eingehen.

Sei $u \in H^1(\Omega)$ die schwache Lösung des Neumann-Problems und $u \in H_0^1(\Omega)$ die schwache Lösung des Dirichlet-Problems. Wir wählen N -dimensionale Unterräume X_N von $H^1(\Omega)$ bzw. $H_0^1(\Omega)$. Dann existiert genau ein $u_N \in X_N$, so dass

$$\forall \varphi \in X_N : \int_{\Omega} \sum_i \partial_{x_i} \varphi \left(\sum_j a_{ij} \partial_{x_j} u_N + h_i \right) + \varphi (b u_N + f) \, d\lambda = 0$$

ist, und bezüglich einer Basis $\{\varphi_k^{(N)}, k = 1, \dots, n\}$ hat u_N die Darstellung $u_N = \sum_{k=1}^N u_{N,k} \varphi_k^{(N)}$, wobei die Koeffizienten $u_{N,k} \in \mathbb{R}$ als eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\sum_{\ell=1}^N a_{k\ell}^{(N)} u_{N,\ell} + c_k^{(N)} = 0, \quad k = 1, \dots, N$$

mit

$$a_{k\ell}^{(N)} = \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j} a_{ij} \partial_{x_i} \varphi_k^{(N)} \partial_{x_j} \varphi_{\ell}^{(N)} + b \varphi_k^{(N)} \varphi_{\ell}^{(N)} \right) \, d\lambda$$

und

$$c_k^{(N)} = \int_{\Omega} \sum_i \partial_{x_i} \varphi_k^{(N)} h_i + \varphi_k^{(N)} f \, d\lambda$$

gegeben sind. Der Nachweis der Struktur des linearen Gleichungssystems geschieht durch direktes Nachrechnen. Der Nachweis der eindeutigen Existenz von u_N kann entweder mit Lax-Milgram im Hilbertraum X_N geführt werden (X_N ist als endlich-dimensionaler Raum vollständig), oder indem man zeigt, dass die Voraussetzungen an a_{ij} , insbesondere die gleichmäßigen Elliptizitätsbedingungen die Invertierbarkeit der Matrix des Gleichungssystems implizieren. Die obige Approximation nennt man auch *Ritz-Galerkin-Approximation*.

Die zentrale Fehlerabschätzung für diese Approximation ist:

Lemma 2.2.11 (Céa). *Für eine Konstante $C > 0$ (die von den Konstanten im Theorem von Lax-Milgram abhängt) gilt:*

$$\|u - u_N\|_{H^1} \leq C \cdot \inf_{v \in X_N} \|u - v\|_{H^1}.$$

Wegen der Separabilität von H^1 können die X_N so gewählt werden, dass

$$\inf_{v \in X_N} \|u - v\|_{H^1} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

gilt.

Bezüglich der Fehlerabschätzungen für numerische Verfahren, die bei der numerischen Durchführung der Ritz-Galerkin-Approximation eingesetzt werden (Interpolation, numerische Integration, iterative Lösung des linearen Gleichungssystems) sei auf Numerik-Lehrveranstaltungen verwiesen.

2.3. Der Spektralsatz für kompakte, selbstadjungierte Operatoren

Seien H_1, H_2 Hilberträume, $T \in \text{Lin}(H_1, H_2)$ und $y \in H_2$. Dann ist die Abbildung

$$x \mapsto \langle Tx, y \rangle_{H_2}$$

ein Element des Dualraums von H_1 .

Nach dem Riesz'schen Darstellungssatz (Theorem 2.1.9) existiert genau ein $T^*y \in H_1$ mit

$$\langle Tx, y \rangle_{H_2} = \langle x, T^*y \rangle_{H_1}.$$

Definition 2.3.1 (Hilbertraum-Adjungierte). Seien H_1, H_2 Hilberträume, $T \in \text{Lin}(H_1, H_2)$. Dann heißt die Abbildung $T^*: H_2 \rightarrow H_1$ mit $\langle Tx, y \rangle_{H_2} = \langle x, T^*y \rangle_{H_1}$ für alle $x \in H_1$ und $y \in H_2$ Hilbertraum-Adjungierte von T .

Lemma 2.3.1.

- a) Es gilt $T^* \in \text{Lin}(H_2, H_1)$ mit $\|T^*\| = \|T\|$.
- b) Für $\alpha \in \mathbb{K}$ ist $(\alpha T)^* = \bar{\alpha}T^*$.
Ferner gilt $(T + S)^* = T^* + S^*$ und $(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$.
- c) Es gilt $T^{**} = T$.

Beispiel 15. Wir tragen einige einfache Beispiele zusammen.

- a) Sei $H_1 = H_2 = \mathbb{R}^n$, $T = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$. Dann ist $T^* = (a_{ij})^t$ die transponierte Matrix.
- b) Sei $H_1 = H_2 = \mathbb{C}^n$, $T = (a_{ij})$. Dann ist $T^* = (\bar{a}_{ij})^t$.
- c) Sei $H_1 = H_2 = \ell_{\mathbb{R}}^2$, $T(x_n) = (a_n x_n)$, $n \in \mathbb{N}$ mit $\sup_n |a_n| < \infty$. Dann ist $T^*(x_n) = (a_n x_n) = T$.
- d) Sei $H_1 = H_2 = \ell_{\mathbb{C}}^2$, $T(x_n) = (a_n x_n)$, $n \in \mathbb{N}$ mit $\sup_n |a_n| < \infty$. Dann ist $T^*(x_n) = (\bar{a}_n x_n)$.

Beispiel 16. Wir betrachten ein etwas komplizierteres Beispiel. Sei $H_1 = H_2 = L^2(\Omega_1, \mathbb{C})$, Ω_1 λ -messbare Teilmenge von \mathbb{R}^n , $K: \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{C}$, Ω_2 λ -messbare Teilmenge von \mathbb{R}^m sowie K messbare Funktion mit

$$\|K\| := \left(\int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} |K(\xi, \eta)|^2 d\eta d\xi \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Dann ist T mit

$$Tf(\eta) := \int_{\Omega_1} K(\xi, \eta) f(\xi) d\xi, \quad \eta \in \Omega_2$$

ein Element von $\text{Lin}(L^2(\Omega_1, \mathbb{C}), L^2(\Omega_2, \mathbb{C}))$ mit $\|T\| \leq \|K\|$. Außerdem ist im Fall $n = m$, $\Omega_1 = \Omega_2$

$$T^*g(\eta) = \int_{\Omega_1} \overline{K(\eta, \xi)} g(\xi) d\xi.$$

Die Stetigkeit ergibt sich dabei mit der Ungleichung von Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned}
 \|Tf\|_{L^2}^2 &= \int_{\Omega_2} \left| \int_{\Omega_1} K(\xi, \eta) f(\xi) \, d\xi \right|^2 \, d\eta \\
 &\leq \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} |K(\xi, \eta)| \cdot |f(\xi)| \, d\xi \right)^2 \, d\eta \\
 &\leq \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} |K(\xi, \eta)|^2 \, d\xi \right) \cdot \left(\int_{\Omega} |f(\xi)|^2 \, d\xi \right) \, d\eta \\
 &= \underbrace{\|K\|^2}_{< \infty} \cdot \|f\|_{L^2}^2
 \end{aligned}$$

und somit ist $T \in \text{Lin}(L^2(\Omega_1, \mathbb{C}), L^2(\Omega_2, \mathbb{C}))$. Den adjungierten Operator T^* erhält man durch direktes Nachrechnen (beachte $\langle f, g \rangle_{L^2} = \int \bar{f}g \, d\lambda$). Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist $T^* = T$.

Definition 2.3.2 (selbstadjungiert). Der Operator T heißt genau dann selbstadjungiert, wenn $T = T^*$ gilt. Das ist äquivalent dazu, dass die Gleichung

$$\langle Tx, y \rangle_H = \langle x, Ty \rangle_H$$

für alle $x, y \in H$ erfüllt ist.

Bemerkung 16. Aus der Selbstadjungiertheit von T folgt insbesondere

$$\langle Tx, x \rangle_H = \langle x, Tx \rangle_H = \overline{\langle Tx, x \rangle_H}$$

für alle $x \in H$. Also ist $\langle Tx, x \rangle_H \in \mathbb{R}$ für alle $x \in H$.

Definition 2.3.3 (Normaler Operator). T heißt genau dann normal, wenn $T^*T = TT^*$ gilt. Dies ist äquivalent dazu, dass für den Kommutator $[T^*, T] := T^*T - TT^* = 0$ gilt.

Lemma 2.3.2. Der Operator T ist genau dann normal, wenn

$$\|Tx\|_H = \|T^*x\|_H$$

für alle $x \in H$ gilt.

Definition 2.3.4 (Kompakter Operator). Seien E, F Banachräume. Der Operator $T \in \text{Lin}(E, F)$ heißt kompakt, falls $\overline{TB_E}$ (der Abschluss des Bildes der abgeschlossenen Einheitskugel in E) kompakt in F ist. Äquivalent dazu sind

- Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq B_E$ impliziert, dass $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge in F besitzt.
- Für alle $\varepsilon > 0$ existiert eine endliche Teilmenge $M \subseteq F$ mit $TB_E \subseteq M + \varepsilon B_F$.

Wir bezeichnen die Menge aller kompakten Operatoren von E nach F mit $K(E, F)$ bzw. $K(E, E) = K(E)$.

Lemma 2.3.3. Die Menge $K(E, F)$ ist ein abgeschlossener Untervektorraum von $\text{Lin}(E, F)$.

Beispiel 17.

- a) $T \in \text{Lin}(E, F)$ wobei TE endliche Dimension hat (also hat T auch endlichen Rang). Dann folgt $T \in K(E, F)$. Dies gilt, da TB_E beschränkt in TE und TE wegen Vollständigkeit abgeschlossen in F ist. Also ist $\overline{TB_E}$ kompakt in TE (wegen $\dim(TE) < \infty$) und so auch in F .
- b) Hat E endliche Dimension, folgt $K(E, F) = \text{Lin}(E, F)$ (da für alle $T \in \text{Lin}(E, F)$ $\dim(TE) < \infty$ gilt).
- c) Seien $\mathcal{F}(E, T)$ alle Operatoren mit endlichem Rang. Dann gilt $\overline{\mathcal{F}(E, F)} \subseteq K(E, F)$.

Man kann sich die Frage stellen, ob sogar $\overline{\mathcal{F}(E, F)} = K(E, F)$ gilt. Dies ist im Allgemeinen zu verneinen, was 1971 von Enflo gezeigt wurde. Allerdings gilt die Gleichheit, wenn F ein Hilbertraum ist.

Lemma 2.3.4. Sei E ein Banachraum und F ein Hilbertraum. Dann gilt

$$\overline{\mathcal{F}(E, F)} = K(E, F).$$

Beispiel 18. Der in Beispiel 16 definierte Integraloperator $T: L^2(\Omega_1, \mathbb{K}) \rightarrow L^2(\Omega_2, \mathbb{K})$ ist kompakt. Denn wählt man ein vollständiges Orthonormalsystem $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von $L^2(\Omega_1, \mathbb{K})$, erhalten wir mit Parseval

$$\begin{aligned} \|K\|^2 &= \int_{\Omega_2} \|\overline{K(x, \cdot)}\|_{L^2(\Omega_1, \mathbb{K})}^2 dx \\ &= \int_{\Omega_2} \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle \overline{K(x, \cdot)}, e_n \rangle_{L^2(\Omega_1, \mathbb{K})}|^2 dx \\ &= \int_{\Omega_2} \sum_{n \in \mathbb{N}} |Te_n(x)|^2 dx \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \|Te_n\|_{L^2(\Omega_2, \mathbb{K})}^2. \end{aligned}$$

Wir definieren nun die orthogonalen Projektionen P_n durch $P_n f = \sum_{k=1}^n \langle f, e_k \rangle_{L^2(\Omega_1, \mathbb{K})} e_k$. Dann gilt wegen Stetigkeit von T und Satz 2.1.7:

$$\begin{aligned} \|Tf - TP_n f\|_{L^2(\Omega_2, \mathbb{K})} &= \left\| T \left(\sum_{k>n} \langle f, e_k \rangle_{L^2(\Omega_1, \mathbb{K})} e_k \right) \right\|_{L^2(\Omega_2, \mathbb{K})} \\ &= \left\| \sum_{k>n} \langle f, e_k \rangle_{L^2(\Omega_1, \mathbb{K})} Te_k \right\|_{L^2(\Omega_2, \mathbb{K})} \\ &\leq \sum_{k>n} |\langle f, e_k \rangle_{L^2(\Omega_1, \mathbb{K})}| \cdot \|Te_k\|_{L^2(\Omega_2, \mathbb{K})} \\ &\leq \underbrace{\left(\sum_{k>n} |\langle f, e_k \rangle_{L^2(\Omega_1, \mathbb{K})}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{\leq \|f\|_{L^2(\Omega_1, \mathbb{K})}} \cdot \underbrace{\left(\sum_{k>n} \|Te_k\|_{L^2(\Omega_2, \mathbb{K})}^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0}. \end{aligned}$$

Daraus folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} TP_n = T$ in $\text{Lin}(L^2(\Omega_1, \mathbb{K}), L^2(\Omega_2, \mathbb{K}))$. Da $\mathfrak{R}(P_n)$ und so auch $\mathfrak{R}(TP_n) = T(\mathfrak{R}(P_n))$ endlich-dimensional sind, folgt nach Lemma 2.3.4 die Kompaktheit von T .

Man kann bei Vorhandensein entsprechender Integrabilität von K auch Integraloperatoren $T^{p,q}$ von $L^p(\Omega_1, \mathbb{K})$ nach $L^q(\Omega_2, \mathbb{K})$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ erhalten. Auch diese sind stetig, was man ähnlich wie im Fall $p = q = 2$ beweisen kann – hier mit der Hölder-Ungleichung statt mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung. Der Nachweis der Kompaktheit verläuft über den Satz von Fréchet-Kolmogorov-Riesz, siehe [1]. Solche Operatoren nennt man auch *Hilbert-Schmidt-Integraloperatoren*.

Lemma 2.3.5 (Produkt kompakter Operatoren). *Seien X, Y, Z Banachräume sowie $T_1 \in \text{Lin}(X, Y)$ und $T_2 \in \text{Lin}(Y, Z)$. Ist nun T_1 oder T_2 kompakt, folgt die Kompaktheit von $T_2 \circ T_1$.*

Bemerkung 17. *Das eben bewiesene Lemma 2.3.5 lässt sich für $X = Y = Z$ auch in der Sprache der Algebra ausdrücken. Mit der Verkettung \circ als Multiplikation, wird der Vektorraum $(\text{Lin}(X), +, \circ)$ eine (nicht kommutative) Algebra. Das heißt, die Multiplikation erfüllt das Assoziativgesetz (aber nicht das Kommutativgesetz) und ist distributiv über der Addition. Außerdem gilt für alle Skalare $\alpha \in K$ die Identität*

$$\alpha(f \circ g) = (\alpha f) \circ g = f \circ (\alpha g).$$

Ferner gilt für $S, T \in \text{Lin}(X)$ nach Lemme 1.3.3 die Ungleichung

$$\|S \circ T\| \leq \|S\| \cdot \|T\|.$$

Eine Algebra mit einer Norm, die diese Ungleichung erfüllt, heißt *Banachalgebra*. Damit ist $(\text{Lin}(X), +, \circ, \|\cdot\|)$ eine Banachalgebra. Und Lemma 2.3.5 besagt nun, dass $K(X)$ ein Ideal in dieser Banachalgebra ist.

Satz 2.3.6 (Eigenschaften kompakter Operatoren). *Sei X ein Banachraum, $T \in K(X)$ und $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$ sowie $A = \lambda \text{Id} - T$, dann gilt:*

1. $\dim(\text{kern}(A)) < \infty$.
2. $\mathfrak{R}(A)$ ist abgeschlossen in X .
3. A ist genau dann injektiv, wenn A surjektiv ist.

Für den Rest dieses Kapitels sei X ein Banachraum über \mathbb{C} und $T \in \text{Lin}(X)$.

Definition 2.3.5.

1. Die Menge $\varrho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{Id} - T \text{ ist bijektiv}\}$ heißt Resolventenmenge von T .
2. Die Menge $\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \varrho(T)$ heißt Spektrum von T .
Das Spektrum von T kann zerlegt werden in das
 - Punktspektrum
 $\sigma_p(T) := \{\lambda \in \sigma(T) : \lambda \text{Id} - T \text{ ist nicht injektiv.}\}$,
 - kontinuierliches Spektrum
 $\sigma_c(T) := \{\lambda \in \sigma(T) : \lambda \text{Id} - T \text{ ist injektiv, nicht surjektiv und } \overline{\mathfrak{R}(\lambda - T)} = X.\}$,
 - Residualspektrum
 $\sigma_r(T) := \{\lambda \in \sigma(T) : \lambda \text{Id} - T \text{ ist injektiv und } \overline{\mathfrak{R}(\lambda - T)} \neq X.\}$.
3. Sei $\lambda \in \sigma_p(T)$, dann existiert ein $x \neq 0$ mit $Tx = \lambda x$. In diesem Fall heißt λ Eigenwert und x Eigenvektor von T . Ist X ein Funktionenraum, so heißt x auch Eigenfunktion. Der Untervektorraum $\text{Kern}(\lambda \text{Id} - T)$ heißt Eigenraum von T zum Eigenwert λ .
Der Eigenraum ist ein T -invarianter Unterraum, das heißt, es gilt

$$T(\text{Kern}(\lambda \text{Id} - T)) \subseteq \text{Kern}(\lambda \text{Id} - T).$$

Im weiteren Verlauf verwenden wir folgenden, nicht trivialen Satz aus der Banachraumtheorie, den wir später im Kapitel über Banachraumtheorie beweisen werden.

Satz 2.3.7. Seien E, F Banachräume und sei $L \in \text{Lin}(E, F)$ bijektiv. Dann ist auch L^{-1} stetig, also $L^{-1} \in \text{Lin}(F, E)$.

Korollar 2.3.8. Sei $\lambda \in \varrho(T)$, dann gilt

$$R(\lambda, T) := (\lambda - T)^{-1} \in \text{Lin}(X).$$

Dabei heißt $R(\lambda, T)$ Resolvente von T in λ und $\lambda \mapsto R(\lambda, T)$ nennt man die Resolventenfunktion.

Satz 2.3.9. Die Resolventenmenge $\varrho(T)$ ist offen in \mathbb{C} und die Resolventenfunktion ist eine holomorphe Abbildung von $\varrho(T) \subseteq \mathbb{C}$ nach $\text{Lin}(X)$, das heißt, der Grenzwert

$$\lim_{\mathbb{C} \ni h \rightarrow 0} \frac{R(\lambda + h, T) - R(\lambda, T)}{h}$$

existiert in $\text{Lin}(X)$. Außerdem gilt weiter für $\lambda \in \varrho(T)$ die Ungleichung

$$\|R(\lambda, T)\|^{-1} \leq \text{dist}(\lambda, \sigma(T)).$$

Satz 2.3.10. Das Spektrum $\sigma(T)$ ist kompakt. Und falls zusätzlich $X \neq \{0\}$ gilt, ist das Spektrum $\sigma(T)$ nicht leer mit

$$\sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda| = \lim_{m \rightarrow \infty} \|T^m\|^{\frac{1}{m}} \leq \|T\|.$$

Dieser Wert wird dann Spektralradius von T genannt.

Satz 2.3.11. Sei $X \neq \{0\}$ ein Hilbertraum über \mathbb{C} und $T \in \text{Lin}(X)$ normal, dann gilt

$$\sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda| = \|T\|.$$

Satz 2.3.12. Sei $T \in K(X)$. Dann besteht die Menge $\sigma(T) \setminus \{0\}$ aus abzählbar (also endlich oder abzählbar unendlich) vielen Eigenwerten mit 0 als einzig möglichem Häufungspunkt.

Falls $\sigma(T)$ unendlich viele Elemente enthält, dann ist $\overline{\sigma(T)} = \sigma_p(T) \cup \{0\}$ und 0 ist Häufungspunkt von $\sigma(T)$.

Für $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ ist $\dim(\text{Kern}(\lambda \text{Id} - T)) < \infty$. (Diese Zahl nennt man auch die Vielfachheit des Eigenwerts λ .)

Ist $\dim(X) = \infty$, dann ist $0 \in \sigma(T)$.

Theorem 2.3.13 (Spektralsatz für kompakte, selbstadjungierte Operatoren). Sei H ein Hilbertraum über \mathbb{C} und $T \neq 0$ ein kompakter, selbstadjungierter Operator auf H . Dann gilt:

1. Es gibt ein Orthonormalsystem in H aus Eigenvektoren $e_{k_{j_k}}$, $k \in N \subseteq \mathbb{N}$, $j_k \in \{1, \dots, \dim(\text{Kern}(\lambda_k \text{Id} - T)) < \infty\}$ zu den von 0 verschiedenen Eigenwerten λ_k , $k \in \mathbb{N}$, von T mit $\lambda_{k_1} \neq \lambda_{k_2}$ für $k_1 \neq k_2$, das heißt, es gilt:

$$Te_{k_{j_k}} = \lambda_k e_{k_{j_k}},$$

wobei $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\} = \sigma_p(T) \setminus \{0\}$. Falls N eine unendliche Menge ist, gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = 0$.

2. $H = \text{Kern}(T) \oplus \overline{\text{span}\{e_{k_{j_k}}\}}$, wobei $\overline{\text{span}\{e_{k_{j_k}}\}} \perp \text{Kern}(T)$ ist.
3. Für alle $x \in H$ gilt: $Tx = \sum_{k \in N} \lambda_k \langle x, e_{k_{j_k}} \rangle_H e_{k_{j_k}}$.
4. $\sigma_p(T) \subseteq [-\|T\|, \|T\|] \subseteq \mathbb{R}$.
5. $\|T\| \in \sigma_p(T)$ oder $-\|T\| \in \sigma_p(T)$.
6. Ist T positiv semidefinit, das heißt, für alle $x \in H$ gilt $\langle x, Tx \rangle_H \geq 0$, dann gilt $\sigma_p(T) \subseteq [0, \|T\|]$.

Bemerkung 18. Theorem 2.3.13 ist eine unendlich-dimensionale Verallgemeinerung des Theorems aus der Linearen Algebra über die reelle Diagonalisierbarkeit symmetrischer Matrizen mit Hilfe von Orthonormalbasen aus Eigenvektoren.

Satz 2.3.14 (Spektralsatz für kompakte, normale Operatoren). *Sei H ein \mathbb{C} -Hilbertraum und $T \in K(H)$ normal mit $T \neq 0$. Dann gelten folgende Aussagen aus Theorem 2.3.13:*

1. *Es gibt ein Orthonormalsystem in H aus Eigenvektoren $e_{k_{j_k}}$, $k \in N \subseteq \mathbb{N}$, $j_k \in \{1, \dots, \dim(\text{Kern}(\lambda_k \text{Id} - T)) < \infty\}$ zu den von 0 verschiedenen Eigenwerten λ_k , $k \in \mathbb{N}$, von T mit $\lambda_{k_1} \neq \lambda_{k_2}$ für $k_1 \neq k_2$, das heißt, es gilt:*

$$Te_{k_{j_k}} = \lambda_k e_{k_{j_k}},$$

wobei $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\} = \sigma_p(T) \setminus \{0\}$. Falls N eine unendliche Menge ist, gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = 0$.

2. *$H = \text{Kern}(T) \oplus \overline{\text{span}\{e_{k_{j_k}}\}}$, wobei $\overline{\text{span}\{e_{k_{j_k}}\}} \perp \text{Kern}(T)$ ist.*
3. *Für alle $x \in H$ gilt: $Tx = \sum_{k \in N} \lambda_k \langle x, e_{k_{j_k}} \rangle_H e_{k_{j_k}}$.*

Bemerkung 19. *Anhand des Beweises erkennt man, dass die Aussagen 4. und 6. auch gelten, falls T nur ein selbstadjungierter, stetiger Operator, aber nicht kompakt ist.*

Bemerkung 20. *Ist X ein Banachraum über \mathbb{R} , so kann man X komplexifizieren, das heißt, sei $\tilde{X} := X \times X$ und für $x = (x_1, x_2) \in \tilde{X}$, $\alpha = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ sei $\alpha x := (ax_1 - bx_2, ax_2 + bx_1)$ und $\bar{x} := (x_1, -x_2)$. Damit wird \tilde{X} zu einem Vektorraum über \mathbb{C} und mit*

$$\|x\|_{\tilde{X}} := \sup_{\theta \in \mathbb{R}} \left(\|\cos(\theta)x_1 - \sin(\theta)x_2\|_X^2 + \|\sin(\theta)x_1 + \cos(\theta)x_2\|_X^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Für alle $x \in \tilde{X}$ und $\theta \in \mathbb{R}$ gilt dann:

$$\|e^{i\theta x}\|_{\tilde{X}} = \|x\|_{\tilde{X}}.$$

Dadurch wird \tilde{X} zu einem Banachraum über \mathbb{C} . Falls X ein Hilbertraum ist, so ist \tilde{X} dann ein Hilbertraum über \mathbb{C} .

Sei $T \in \text{Lin}(X)$, dann ist durch $\tilde{T}x := (Tx_1, Tx_2)$ ein stetiger linearer Operator \tilde{T} auf \tilde{x} definiert.

Zusätzliche Eigenschaften, wie Kompaktheit oder Selbstadjungierung übertragen sich von T auf \tilde{T} . Somit kann man mit Hilfe dieser Komplexifizierung Spektralsätze wie Theorem 2.3.13 auch auf reelle Hilberträume übertragen.

Entsprechendes gilt für Spektralsätze in reellen Banachräumen.

Satz 2.3.15 (Charakterisierung von Eigenwerten). Sei H ein \mathbb{C} -Hilbertraum und $T \neq 0$ ein kompakter, selbstadjungierter Operator auf H . Dann gilt falls

$$\lambda := \sup_{\substack{u \in H, \\ u \neq 0}} \mathcal{R}_T(u) := \sup_{\substack{u \in H, \\ u \neq 0}} \frac{\langle Tu, u \rangle_H}{\langle u, u \rangle_H} = \sup_{\substack{u \in H, \\ \|u\|_H=1}} \langle Tu, u \rangle_H$$

ungleich 0 ist, dass λ der größte von 0 verschiedene Eigenwert von T und das Supremum wird von allen Eigenvektoren zum Eigenwert λ angenommen.

Falls

$$\mu := \inf_{\substack{u \in H, \\ u \neq 0}} \mathcal{R}_T(u) \neq 0$$

ist, dann ist μ der kleinste von 0 verschiedene Eigenwert von T und das Infimum wird von allen Eigenvektoren zum Eigenwert μ angenommen.

Für alle von 0 verschiedene Eigenwerte sind die Lösungen der jeweiligen Eigenwertgleichungen die Lösungen von Variationsproblemen mit Nebenbedingung, wobei die Eigenwerte als Lagrangeparameter auftauchen.

Den zweitgrößten, von Null verschiedenen Eigenwert erhält man durch

$$\sup_{\substack{u \in H, \\ u \neq 0, \\ u \perp \text{Kern}(\lambda \text{Id} - T)}} \mathcal{R}_T(u).$$

Entsprechend fortsetzen kann man dieses Verfahren für die anderen von Null verschiedenen Eigenwerte.

$\mathcal{R}_T(u)$ nennt man auch den Rayleigh-Quotienten von u .

Definition 2.3.6 ((Schwacher) Inverser Laplace-Operator). Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes, stückweise C^1 -berandetes Gebiet. Dann ist der (schwache) inverse Laplace-Operator (mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen)

$$\Delta^{-1} : L^2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega), f \mapsto \Delta^{-1} f$$

definiert durch die nach Satz 2.2.9 für jedes $f \in L^2(\Omega)$ eine eindeutige Lösung $\Delta^{-1} f \in H_0^1(\Omega)$ von

$$\int_{\Omega} \nabla \Delta^{-1} f \cdot \nabla \varphi + f \varphi \, d\lambda = 0$$

für alle $\varphi \in H_0^1(\Omega)$.

Satz 2.3.16 (Satz von Rellich). Sei Ω wie in Definition 2.3.6, dann ist die Einbettung

$$\text{Id} : H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$$

ein kompakter Operator, das heißt, jede beschränkte Folge in $H^1(\Omega)$ besitzt bezüglich der L^2 -Norm eine konvergente Teilfolge.

Satz 2.3.17 (Eigenschaften von $-\Delta^{-1}$). Der (schwache) inverse negative Laplace-Operator $-\Delta^{-1}$ ist ein injektiver, positiv semidefinierter, kompakter, selbstadjungierter Operator auf $L^2(\Omega)$.

Satz 2.3.18 (Spektralsatz für den Laplace-Operator). *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes und stückweise C^1 -berandetes Gebiet. Sei $\Delta := (\Delta^{-1})^{-1} : \Delta^{-1}(L^2(\Omega)) \rightarrow L^2(\Omega)$ der schwache Laplace-Operator, dann gilt:*

1. $\sigma_p(-\Delta) = \{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$ mit $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ sowie $\dim(\text{Kern}(\lambda_k \text{Id} + \Delta)) < \infty$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \infty$.
2. *Es existieren Funktionen $e_k, k \in \mathbb{N}$ aus $H_0^1(\Omega)$, so dass $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in $L^2(\Omega)$ aus Eigenvektoren von $-\Delta$ ist, das heißt, es gilt*

$$\forall_{\varphi \in H_0^1(\Omega)} : \langle e_k, \varphi \rangle_{H_0^1} = \lambda_k \langle e_k, \varphi \rangle_{L^2}$$

und

$$\forall_{u \in L^2(\Omega)} : u = \sum_{k=1}^{\infty} \langle e_k, u \rangle_{L^2} e_k \text{ bezüglich } L^2 \text{ und } \|u\|_{L^2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \langle e_k, u \rangle_{L^2}^2.$$

3.

$$\lambda_1 = \min \left\{ \frac{\|u\|_{H_0^1}^2}{\|u\|_{L^2}^2} : u \in H_0^1, u \neq 0 \right\},$$

⋮

$$\lambda_{k+1} = \min \left\{ \frac{\|u\|_{H_0^1}^2}{\|u\|_{L^2}^2} : u \in H_0^1, u \neq 0, u \perp \text{span}\{e_j, j = 1, \dots, k\} \right\}.$$

3. Banachraumtheorie

3.1. Der Satz von Hahn-Banach und die Hauptsätze der Banachraumtheorie

Der Satz von Hahn-Banach

Theorem 3.1.1 (Satz von Hahn-Banach). Sei X ein \mathbb{R} -Vektorraum und sei

1. Die Abbildung $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ sublinear, das heißt, es gilt:
 - Für alle $x, y \in X$ gilt: $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.
 - Für alle $x \in X$ und für alle $\alpha \geq 0$ gilt: $p(\alpha x) = \alpha p(x)$.
2. Die Abbildung $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$ ist linear, wobei Y ein Untervektorraum von X ist.
3. Für alle $x \in Y$ gilt $f(x) \leq p(x)$.

Dann gibt es eine lineare Abbildung $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F(x) = f(x)$ für $x \in Y$ und $F(x) \leq p(x)$ für $x \in X$.

Lemma von Zorn:

Sei (M, \leq) eine nichtleere, partiell geordnete Menge (das heißt, aus $m_1 \leq m_2$ und $m_2 \leq m_3$ folgt $m_1 \leq m_3$ und für alle $m \in M$ gilt $m \leq m$), so dass jede total geordnete Teilmenge N (das heißt, für alle $n_1, n_2 \in N$ gilt $n_1 \leq n_2$ oder $n_2 \leq n_1$) eine obere Schranke besitzt (das heißt, es gibt ein $m \in M$ mit $n \leq m$ für alle $n \in N$). Dann besitzt M ein maximales Element (das heißt, es gilt $m_0 \in M$, sodass für alle $m \in M$ gilt: aus $m_0 \leq m$ folgt $m \leq m_0$).

Satz 3.1.2 (Satz von Hahn-Banach für lineare Funktionale). Sei X ein normierter \mathbb{K} -Vektorraum und Y ein Untervektorraum (mit der Norm von X). Dann gibt es zu jedem y' aus dem Dualraum Y' ein $x' \in X'$ mit $x' = y'$ auf Y und

$$\|x'\|_{X'} = \|y'\|_{Y'}.$$

Anwendungen des Satzes von Hahn-Banach

Satz 3.1.3. Sei Y ein abgeschlossener Unterraum eines normierten Raumes X und $x_0 \notin Y$. Dann gibt es ein $x' \in X'$ mit $x' = 0$ auf Y , $\|x'\|_{X'} = 1$ und $x'(x_0) = \text{dist}(x_0, Y)$.

Bemerkung 21. Satz 3.1.3 kann als Verallgemeinerung des Projektionssatzes für Hilberträume aufgefasst werden. Ist nämlich X ein Hilbertraum, so definiere

$$x'(x) := \left\langle x, \frac{(\text{Id} - P)x_0}{\|(\text{Id} - P)x_0\|} \right\rangle,$$

wobei P die orthogonale Projektion auf Y sei. Dann gilt nach dem Projektionssatz:

$$x' = 0 \text{ auf } Y \text{ und } x'(x_0) = x'(x_0 - Px_0) = \|(\text{Id} - P)x_0\|$$

und außerdem ist $|x'(x)| \leq \|x\|_X$. Also hat x' die Eigenschaften aus Satz 3.1.3.

Korollar 3.1.4. Sei X ein normierter Raum und sei $x_0 \in X$, dann gilt Folgendes:

1. Für alle $x_0 \neq 0$ existiert ein $x'_0 \in X'$ mit $\|x'_0\|_{X'} = 1$ und $x'_0(x_0) = \|x_0\|_X$.
2. Ist $x'(x_0) = 0$ für alle $x' \in X'$, dann ist $x_0 = 0$.
3. Sei $J_X x_0(x') := x'(x_0)$ für alle $x' \in X'$. Dann ist $J_X x_0 \in X''$ mit $\|J_X x_0\| = \|x_0\|_X$, wobei X'' den Bidualraum beschreibt.

Theorem 3.1.5 (Trennungssatz). Sei X ein normierter Raum und M eine nicht leere, abgeschlossene und konvexe Teilmenge von X und $x_0 \in X \setminus M$. Dann existieren ein $x' \in X'$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\text{Re}(x'(x)) \leq \alpha$ für alle $x \in M$ und $\text{Re}(x'(x_0)) > \alpha$. Insbesondere ist $x' \neq 0$ und somit $\{x \in X : \text{Re}(x'(x)) = \alpha\}$ eine Hyperebene.

Bemerkung 22. Für nicht konvexe Mengen gibt es im Allgemeinen keine entsprechende Aussage.

Die Hauptsätze der Banachraumtheorie

Theorem 3.1.6 (Bairescher Kategoriensatz). Sei X ein nichtleerer vollständiger metrischer Raum und $X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ mit abgeschlossenen Mengen $A_k \subseteq X$. Dann gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $(A_{k_0})^\circ \neq \emptyset$.

Theorem 3.1.7 (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit). Sei X ein nichtleerer vollständiger metrischer Raum und Y sei ein normierter Raum. Sei weiter $\mathcal{F} \subseteq C^0(X, Y)$ mit $\sup_{f \in \mathcal{F}} \|f(x)\|_Y < \infty$ für jedes $x \in X$. Dann existiert ein $x_0 \in X$ und ein $\varepsilon_0 > 0$, sodass

$$\sup_{x \in B_{\varepsilon_0}(x_0)} \sup_{f \in \mathcal{F}} \|f(x)\|_Y < \infty$$

gilt.

Theorem 3.1.8 (Satz von Banach-Steinhaus). Sei X ein Banachraum, Y ein normierter Raum und $\mathcal{T} \subseteq \text{Lin}(X, Y)$ mit $\sup_{T \in \mathcal{T}} \|Tx\|_Y < \infty$ für jedes $x \in X$. Dann ist \mathcal{T} eine beschränkte Menge in $\text{Lin}(X, Y)$, das heißt

$$\sup_{T \in \mathcal{T}} \|T\|_{\text{Lin}(X, Y)} < \infty.$$

Satz 3.1.9. Sei X ein Banachraum, Y ein normierter Raum und $\mathcal{T} \subseteq \text{Lin}(X, Y)$ mit der Eigenschaft, dass für alle $x \in X$ und für alle $y' \in Y'$ gilt: $\sup_{T \in \mathcal{T}} |y'(Tx)| < \infty$. Dann ist \mathcal{T} eine beschränkte Menge in $\text{Lin}(X, Y)$.

Definition 3.1.1 (Offene Abbildung). Seien X, Y zwei metrische Räume. Dann heißt die Abbildung $f : X \rightarrow Y$ offen, falls gilt:

$$U \text{ offen in } X \quad \Rightarrow \quad f(U) \text{ offen in } Y.$$

Bemerkung 23. Ist f bijektiv, so ist f genau dann offen, wenn f^{-1} stetig ist. Sind X, Y normierte Räume und ist die Abbildung $T : X \rightarrow Y$ linear, dann gilt:

$$T \text{ ist offen} \Leftrightarrow \exists_{\delta > 0} : B_\delta(0) \subseteq T(B_1(0)).$$

Denn sei U offen und $x \in U$. Dann wählen wir ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq U$. Wegen der Inklusion $B_\delta(0) \subseteq T(B_1(0))$ folgt

$$B_{\varepsilon\delta}(Tx) \subseteq T(B_\varepsilon(x)) \subseteq T(U) \Rightarrow T(U) \text{ ist offen.}$$

Theorem 3.1.10 (Satz von der offenen Abbildung). Seien X und Y Banachräume. Dann gilt für jedes $T \in \text{Lin}(X, Y)$

$$T \text{ ist surjektiv} \Leftrightarrow T \text{ ist offen.}$$

Theorem 3.1.11 (Satz von der inversen Abbildung). Sind X, Y Banachräume und $T \in \text{Lin}(X, Y)$, dann gilt:

$$T \text{ ist bijektiv} \Rightarrow T^{-1} \in \text{Lin}(Y, X).$$

Theorem 3.1.12 (Satz vom abgeschlossenen Graphen). Seien X, Y Banachräume und die Abbildung $T : X \rightarrow Y$ linear. Dann ist der Graph

$$\text{graph}(T) := \{(x, Tx) \in X \times Y : x \in X\}$$

genau dann abgeschlossen in $X \times Y$, wenn $T \in \text{Lin}(X, Y)$.

Definition 3.1.2 (Projektion auf Y). Sei X ein Vektorraum und $Y \subseteq X$ ein Untervektorraum. Eine lineare Abbildung $P : X \rightarrow X$ heißt (lineare) Projektion auf Y falls

$$P^2 = P \text{ und } \mathfrak{R}(P) = Y$$

gilt.

Lemma 3.1.13.

1. P ist genau dann eine Projektion auf Y , wenn $(P : X \rightarrow Y \text{ und } P|_Y = \text{Id})$ ist.
2. Falls $P : X \rightarrow X$ eine Projektion ist, dann gilt $X = \text{Kern}(P) \oplus \mathfrak{R}(P)$.
3. Falls $P : X \rightarrow X$ eine Projektion ist, so ist $(\text{Id} - P)$ ebenfalls eine Projektion mit
 - $\text{Kern}(\text{Id} - P) = \mathfrak{R}(P)$,
 - $\mathfrak{R}(\text{Id} - P) = \text{Kern}(P)$.
4. Zu jedem Unterraum Y von X existiert eine Projektion auf Y .

Definition 3.1.3 (Stetige Projektion). Sei X ein normierter Raum. Dann ist

$$\mathcal{P}(X) := \{P \in \text{Lin}(X) \text{ mit } P^2 = P\}$$

die Menge der stetigen Projektionen.

Lemma 3.1.14. Sei $P \in \mathcal{P}(X)$, dann gilt:

1. $\text{Kern}(P)$ und $\mathfrak{R}(P)$ sind abgeschlossen.
2. $\|P\| \geq 1$ oder $P = 0$.

Satz 3.1.15 (Satz vom abgeschlossenen Komplement). Sei X ein Banachraum, $Y \subseteq X$ ein abgeschlossener Unterraum und $Z \subseteq X$ ein weiterer Unterraum mit $Y \oplus Z = X$. Dann ist äquivalent:

- (1) Es gibt eine stetige Projektion P auf Y mit $Z = \text{Kern}(P)$.
- (2) Z ist abgeschlossen.

Bemerkung 24. Ist Y ein abgeschlossener Unterraum eines Hilbertraumes H , dann ist nach dem Projektionssatz die orthogonale Projektion P auf Y eine stetige Projektion auf Y im Sinne der obigen Definition 3.1.3 und $H = Y \oplus Y^\perp$ mit Y, Y^\perp abgeschlossen. Wegen der Besselschen Ungleichung ist $\|P\| \leq 1$, und daher wegen Lemma 3.1.14 ist $\|P\| = 1$ oder $P = 0$.

Satz 3.1.16. Sei X ein normierter Raum, E ein n -dimensionaler Unterraum mit Basis $\{e_i : i = 1, \dots, n\}$ und Y ein abgeschlossener Unterraum mit $Y \cap E = \{0\}$. Dann gilt:

1. Es gibt $e'_1, \dots, e'_n \in X'$ mit $e'_j|_Y = 0$ und $e'_j(e_i) = \delta_{ij}$.
2. Es gibt eine stetige Projektion P auf E mit $Y \subseteq \text{Kern}(P)$.

3.2. Kompakte Operatoren und adjungierte Operatoren auf Banachräumen

Theorem 3.2.1 (Jordansche Normalform für kompakte Operatoren). *Sei X ein Banachraum und T ein kompakter Operator auf X . Dann gelten:*

1. Die Aussagen aus Satz 2.3.12.

2. Für ein $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ ist

$$1 \leq n_\lambda := \max \left\{ n \in \mathbb{N} : \text{Kern} \left((\lambda \text{Id} - T)^{n-1} \right) \neq \text{Kern} \left((\lambda \text{Id} - T)^n \right) \right\} < \infty.$$

Die Zahl $n_\lambda \in \mathbb{N}$ heißt Ordnung von λ .

3. (Riesz-Zerlegung) Für $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ gilt

$$X = \text{Kern} \left((\lambda \text{Id} - T)^{n_\lambda} \right) \oplus \mathfrak{R} \left((\lambda \text{Id} - T)^{n_\lambda} \right).$$

Beide Unterräume sind abgeschlossen und T -invariant. Und der sogenannte charakteristische Unterraum $\text{Kern} \left((\lambda \text{Id} - T)^{n_\lambda} \right)$ ist endlich-dimensional.

4. Sei $\lambda \in \sigma_P(T)$, dann gibt es für $n = 1, \dots, n_\lambda$ Unterräume $E_n \subset \text{Kern} \left((\lambda \text{Id} - T)^n \right) \setminus \text{Kern} \left((\lambda \text{Id} - T)^{n-1} \right)$, sodass

$$\text{Kern} \left((\lambda \text{Id} - T)^{n_\lambda} \right) = \bigoplus_{k=1}^{n_\lambda} N_k$$

mit $N_k := \bigoplus_{l=0}^{k-1} (\lambda \text{Id} - T)^l (E_k)$ gilt.

5. Die Unterräume N_k ($k = 1, \dots, n_\lambda$) sind T -invariant und die Dimensionen $d_k := \dim \left((\lambda \text{Id} - T)^l (E_k) \right)$ sind unabhängig von $l \in \{0, \dots, k-1\}$.

6. Sind $\{e_{k,j} : j = 1, \dots, d_k\}$ Basen von E_k , so ist $\left\{ (\lambda \text{Id} - T)^l e_{k,j} : 0 \leq l < k \leq n_\lambda, 1 \leq j \leq d_k \right\}$ eine Basis von $\text{Kern} \left((\lambda \text{Id} - T)^{n_\lambda} \right)$ und mit

$$x = \sum_{k,j,l} \alpha_{k,j,l} (\lambda \text{Id} - T)^l e_{k,j}$$

und $y = \sum_{k,j,l} \beta_{k,j,l} (\lambda \text{Id} - T)^l e_{k,j}$

ist $Tx = y$ äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} \beta_{k,j,k-1} \\ \vdots \\ \beta_{k,j,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{k,j,k-1} \\ \vdots \\ \alpha_{k,j,0} \end{pmatrix}.$$

Korollar 3.2.2. In der Situation von Theorem 3.2.1 gilt außerdem:

1. Für $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ ist $\sigma(T|_{\mathfrak{R}((\lambda-T)^{n_\lambda})}) = \sigma(T) \setminus \{\lambda\}$.
2. Ist P_λ für $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ die (stetige) Projektion auf Kern $((\lambda - T)^{n_\lambda})$ gemäß der Zerlegung aus Theorem 3.2.1 3., dann gilt für alle $\lambda, \mu \in \sigma(T) \setminus \{0\}$:

$$P_\lambda P_\mu = \delta_{\lambda\mu} P_\lambda.$$

Korollar 3.2.3. Ist $T \in K(X)$, wobei X ein Banachraum und $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ sei, dann hat die Resolventenfunktion $\mu \mapsto R(\mu, T)$ in λ einen (isolierten) Pol der Ordnung n_λ . Das heißt,

$$\mu \mapsto (\mu - \lambda)^{n_\lambda} R(\mu, T)$$

kann in λ holomorph fortgesetzt werden und der Wert in λ ist ungleich Null.

Definition 3.2.1 (Adjungierter Operator). Seien X, Y normierte Räume und $T \in \text{Lin}(X, Y)$. Dann heißt der durch

$$T' y'(x) = y'(Tx)$$

für alle $y' \in Y'$ und für alle $x \in X$ definierte Operator $T' : Y' \rightarrow X'$ der adjungierte Operator oder die Adjungierte zu T .

Satz 3.2.4.

1. $T \rightarrow T'$ ist eine lineare Isometrie von $\text{Lin}(X, Y)$ nach $\text{Lin}(Y', X')$.
2. Für alle $T_1 \in \text{Lin}(X, Y)$ und für alle $T_2 \in \text{Lin}(Y, Z)$ gilt $(T_2 T_1)' = T_1' T_2'$.
3. Sei $J_X : X \rightarrow X''$ definiert durch $x \mapsto J_X x$ mit $J_X x(x') = x'(x)$ für alle $x \in X$. Und analog $J_Y : Y \rightarrow Y''$. Dann gilt:

$$T'' J_X = J_Y T.$$

Bemerkung 25.

1. Falls $X = Y = \mathbb{R}^n$ mit $T = (a_{i,j})$, dann gilt $T' = (a_{i,j})^T = (a_{j,i}) = T^*$.
2. Falls $X = Y = \mathbb{C}^n$ mit $T = (a_{i,j})$, dann gilt $T' = (a_{i,j})^T \neq T^* = (\overline{a_{i,j}})^T$.
3. Falls $X = Y = L^2([0, 1], \mathbb{C})$ mit $Tf(\nu) = \int_0^1 \kappa(\xi, \nu) f(\xi) d\xi$, dann folgt

$$T' f(\nu) = \int_0^1 \kappa(\nu, \xi) f(\xi) d\xi$$

und $T^* f(\nu) = \int_0^1 \overline{\kappa(\nu, \xi)} f(\xi) d\xi.$

4. Sind X, Y Hilberträume und seien $R_X : X \rightarrow X'$, $R_Y : Y \rightarrow Y'$ die Isometrien aus dem Riesz'schen Darstellungssatz, das heißt $R_Y(y_1)(y_2) = \langle y_2, y_1 \rangle_Y$ mit $y_1 \mapsto R_Y(y_1)$, dann gilt

$$T^* = R_X^{-1} T' R_Y.$$

Denn aus $T' R_Y(y_1)(x_1) = \langle T x_1, y_1 \rangle_Y = \langle x_1, T^* y_1 \rangle_X$ folgt $R_X^{-1} T' R_Y(y_1) = T^* y_1$.

Satz 3.2.5 (Satz von Schauder). *Seien X, Y Banachräume und $T \in \text{Lin}(X, Y)$, dann gilt:*

$$T \in K(X, Y) \Leftrightarrow T' \in K(Y', X').$$

Satz 3.2.6. *Für Unterräume $Z \subseteq X$ sei der Annihilator Z^0 definiert durch*

$$Z^0 := \{x' \in X' \text{ mit } x'(x) = 0 \text{ für alle } x \in Z\}.$$

Dann gilt:

1. *Ist X ein Hilbertraum und R_X wie in Bemerkung 25, dann ist $Z^0 = R_X(Z^\perp)$.*
2. *Für $T \in \text{Lin}(X, Y)$ gilt $\text{Kern}(T') = \mathfrak{R}(T)^0$.*
3. *Ist Z abgeschlossen mit $\text{codim}(Z) < \infty$, dann gilt $\dim(Z^0) = \text{codim}(Z)$.*

Satz 3.2.7. *Seien X, Y Banachräume und $T \in \text{Lin}(X, Y)$. Dann existiert ein $T^{-1} \in \text{Lin}(Y, X)$ genau dann, wenn $(T')^{-1} \in \text{Lin}(X', Y')$ existiert und es gilt*

$$(T^{-1})' = (T')^{-1}.$$

Theorem 3.2.8 (Fredholmsche Alternative). *Sei X ein Banachraum, $T \in K(X)$ und $\lambda \neq 0$. Dann besitzt das Gleichungssystem $Tx - \lambda x = y$ genau dann eine Lösung $x \in X$, falls $x'(y) = 0$ für alle Lösungen $x' \in X'$ der homogenen adjungierten Gleichung $T'x' - \lambda x' = 0$ ist.*

Die dadurch gegebene Anzahl der Nebenbedingungen an y ist dann gleich der Anzahl der linear unabhängiger Lösungen der homogenen Gleichung $Tz - \lambda z = 0$.

3.3. Lokal konvexe und schwache Topologien

Um den Einstieg in diesen Abschnitt etwas zu vereinfachen, befinden sich im Anhang alle relevanten Definitionen und Sätze aus der Topologie, die hier benötigt werden.

Sei X ein Vektorraum und $(p_\alpha)_{\alpha \in I}$ mit einer beliebigen Indexmenge I eine Familie von Halbnormen auf X . Für jedes $x \in X$ definiere

$$U_{\varepsilon, H}(x) := \{y \in X : \forall \alpha \in H : p_\alpha(x - y) < \varepsilon\},$$

wobei H eine endliche Teilmenge von I sei. Weiter definieren wir

$$\mathcal{V}(x) := \{U_{\varepsilon, H}(x) : \varepsilon > 0, H \subseteq I \text{ endlich}\},$$

$$\mathcal{U}(x) := \{U \subseteq X : \exists V \in \mathcal{V}(x) : V \subseteq U\},$$

$$\mathcal{T} := \{\mathcal{O} \subseteq X : \forall x \in \mathcal{O} \exists V \in \mathcal{V}(x) : V \subseteq \mathcal{O}\}.$$

Dann erhalten wir:

Satz 3.3.1. (X, \mathcal{T}) ist ein topologischer Raum. Für jedes $x \in X$ ist $\mathcal{U}(x)$ der Umgebungsfilter von x und $\mathcal{V}(x)$ die Umgebungsbasis von x . \mathcal{T} heißt die von $(p_\alpha)_{\alpha \in I}$ induzierte lokal konvexe Topologie auf X und (X, \mathcal{T}) ein lokal konvexer (topologischer) Raum. (Lokal konvex deshalb, weil es für jedes $x \in X$ eine Umgebungsbasis aus konvexen Mengen gibt.)

Bemerkung 26. Der topologische Raum (X, \mathcal{T}) ist bereits eindeutig festgelegt durch die Nullumgebungsbasis $\mathcal{V}(0)$, denn es gilt:

$$\mathcal{V}(x) = x + \mathcal{V}(0),$$

$$\mathcal{U}(x) = x + \mathcal{U}(0).$$

Beispiel 19. Sei X ein normierter Raum und X' der Dualraum.

a) Für alle $x \in X$ ist $(p_{x'})_{x' \in X'} := |x'(x)|$ eine Familie von Halbnormen, welche die sogenannte schwache Topologie $\sigma(X, X')$ auf X induziert. $\sigma(X, X')$ ist die schwächste Topologie auf X , bezüglich der alle $x' \in X'$ stetig sind.

b) Für alle $x' \in X'$ ist $(p_x)_{x \in X}$ mit $p_x(x') := |x'(x)|$ eine Familie von Halbnormen auf X' , welche die sogenannte schwach* Topologie $\sigma(X', X)$ auf X' induziert.

Lemma 3.3.2. Sei (X, \mathcal{T}) ein von der Halbnormfamilie $(p_\alpha)_{\alpha \in I}$ induzierter lokal konvexer topologischer Raum. Dann sind äquivalent:

(1) $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$.

(2) $x_n - x \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

(3) Für alle $\alpha \in I$ gilt $p_\alpha(x_n - x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Beispiel 20. Sei X ein normierter Raum. Dann sind äquivalent:

- (1) $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ bezüglich der schwachen Topologie $\sigma(X, X')$.
- (2) Für alle $x' \in X'$ gilt $|x'(x_n - x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.
- (3) Für alle $x' \in X'$ gilt $x'(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x'(x)$.

Man sagt dann, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für $n \rightarrow \infty$ schwach gegen x konvergiert.
Kurzschreibweise: $x_n \rightharpoonup x$ für $n \rightarrow \infty$.

Des Weiteren sind äquivalent:

- (1) $x'_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x'$ bezüglich der schwach* Topologie $\sigma(X', X)$.
- (2) Für alle $x \in X$ gilt $|(x'_n - x')(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.
- (3) Für alle $x \in X$ gilt $x'_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x'(x)$.

Man sagt dann, dass $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für $n \rightarrow \infty$ schwach* gegen x' konvergiert.
Kurzschreibweise: $x'_n \xrightarrow{*} x'$ für $n \rightarrow \infty$.

Lemma 3.3.3. Sei (X, \mathcal{T}) ein von der Halbnormfamilie $P = (p_\alpha)_{\alpha \in I}$ induzierter lokal konvexer topologischer Raum. Dann sind äquivalent:

- (1) (X, \mathcal{T}) ist ein Hausdorffraum.
- (2) $\forall x \in X \setminus \{0\} \exists p_\alpha \in P : p_\alpha(x) \neq 0$.

Lemma 3.3.4. Seien (X, \mathcal{T}_P) und (Y, \mathcal{T}_Q) von den Halbnormfamilien $P = (p_\alpha)_{\alpha \in I_X}$ bzw. $Q = (q_\beta)_{\beta \in I_Y}$ induzierte lokal konvexe topologische Räume und sei $T : X \rightarrow Y$ linear. Dann sind äquivalent:

- (1) T ist stetig.
- (2) T ist stetig in 0.
- (3) Für alle $q_\beta \in Q$ existiert eine endliche Teilmenge $H \subseteq I_X$ und ein $M \geq 0$, sodass für alle $x \in X$ gilt:

$$q_\beta(Tx) \leq M \cdot \max_{\alpha \in H} p_\alpha(x).$$

Korollar 3.3.5. Sei (X, \mathcal{T}) ein von der Halbnormfamilie $P = (p_\alpha)_{\alpha \in I}$ induzierter lokal konvexer topologischer Raum. Eine lineare Abbildung $T : X \rightarrow \mathbb{K}$ ist genau dann stetig, falls es endlich viele $p_1, \dots, p_n \in P$ und ein $M \geq 0$ gibt, sodass für alle $x \in X$ gilt:

$$|T(x)| \leq M \cdot \max_{i=1, \dots, n} p_i(x).$$

Definition 3.3.1 (Dualraum). Sei (X, \mathcal{T}) ein lokal konvexer topologischer Raum. Die Menge aller (bezüglich \mathcal{T}) stetigen linearen Abbildungen $T : X \rightarrow \mathbb{K}$ nennt man den Dualraum X' von X .

Bemerkung 27. Es gibt Verallgemeinerungen des Satzes von Hahn-Banach und der Trennungssätze für lokal konvexe Räume. Für nähere Details siehe [4].

Distributionen

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ eine offene Teilmenge und $\mathcal{D}(\Omega) := C_c^\infty(\Omega)$. Des Weiteren seien Halbnormen $(p_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ definiert durch

$$p_m(\varphi) := \sup_{|\beta| \leq m} \|\partial_x^\beta \varphi(x)\|_{C^0(\Omega)}.$$

Sei außerdem $(p_\alpha)_{\alpha \in I}$ die Familie aller Halbnormen, für die Folgendes gilt: für alle kompakte Teilmengen $K \subseteq \Omega$ existieren $C, m \geq 0$, sodass für alle $\varphi \in C_c^\infty(K)$ die Ungleichung

$$p_\alpha(\varphi) \leq C p_m(\varphi)$$

erfüllt ist. Dann erzeugt $(p_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine lokal konvexe Topologie $\mathcal{T}_\mathcal{D}$ auf $\mathcal{D}(\Omega)$.

Dies impliziert, dass $\varphi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi$ bezüglich $\mathcal{T}_\mathcal{D}$ genau dann gilt, wenn eine kompakte Teilmenge $K \subseteq \Omega$ existiert, sodass $\text{supp}(\varphi_n) \subset K$ und $\text{supp}(\varphi) \subset K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt und zusätzlich $\|\partial_x^\beta \varphi_n\|_{C^0(K)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|\partial_x^\beta \varphi\|_{C^0(K)}$ für alle $\beta \in \mathbb{N}_0^d$ erfüllt ist.

Sei $\mathcal{D}'(\Omega)$ der Dualraum von $(\mathcal{D}(\Omega), \mathcal{T}_\mathcal{D})$. Dann heißen die Elemente von $\mathcal{D}'(\Omega)$ *Distributionen* auf Ω . Analog zum Fall von normierten Räumen nennt man die von der Halbnormfamilie $(p_\varphi)_{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)}$ mit

$$p_\varphi(T) := |T(\varphi)|$$

für alle $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ auf $\mathcal{D}'(\Omega)$ induzierte lokal konvexe Topologie, die schwach* Topologie $\sigma(\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega))$.

Somit konvergiert T_n für $n \rightarrow \infty$ bezüglich der schwach* Topologie $\sigma(\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega))$ genau dann gegen T , wenn $T_n(\varphi)$ für $n \rightarrow \infty$ gegen $T(\varphi)$ konvergiert für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Außerdem gilt:

Lemma 3.3.6. *Seien Ω und $(p_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ wie oben. Dann gilt:*

- a) *Ist $K \subseteq \Omega$ kompakt und $\mathcal{D}_K(\Omega) := C_c^\infty(K)$, so stimmen die von $(p_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ erzeugte lokal konvexe Topologie \mathcal{T}_K auf $\mathcal{D}_K(\Omega)$ mit der Relativtopologie von $(\mathcal{D}(\Omega), \mathcal{T}_\mathcal{D})$ auf $\mathcal{D}_K(\Omega)$ überein.*
- b) *$(\mathcal{D}(\Omega), \mathcal{T}_\mathcal{D})$ ist ein Hausdorffraum.*

Lemma 3.3.7. *Sei $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{K}$ linear. Dann sind äquivalent:*

1. $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.
2. Für alle kompakten Mengen $K \subseteq \Omega$ gilt $T|_{\mathcal{D}_K(\Omega)} \in (\mathcal{D}_K(\Omega))'$.
3. Für alle kompakten Mengen $K \subseteq \Omega$ existieren ein $m \in \mathbb{N}_0$ und ein $C \geq 0$, sodass für alle $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ die Ungleichung

$$|T\varphi| \leq C \cdot \sup_{|\beta| \leq m} \|\partial_x^\beta \varphi\|_{C^0(\Omega)}$$

gilt.

4. T ist folgenstetig in 0, das heißt, falls φ_n für $n \rightarrow \infty$ in $(\mathcal{D}(\Omega), \mathcal{T}_\mathcal{D})$ gegen 0 konvergiert, so folgt $T\varphi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

5. T ist folgenstetig, das heißt, falls φ_n für $n \rightarrow \infty$ in $(\mathcal{D}(\Omega), \mathcal{T}_{\mathcal{D}})$ gegen φ konvergiert, so folgt $T\varphi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T\varphi$.

Bemerkung 28.

1. Sei $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, wobei $L^1_{loc}(\Omega)$ die Menge aller messbaren Funktionen auf Ω (modulo Nullmengen) ist, welche für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq \Omega$ in $L^1(K)$ liegen. Dann ist durch

$$T_f(\varphi) := \int_{\Omega} f(y)\varphi(y) \, dy$$

für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ eine Distribution definiert.

Wegen des Fundamentallemmas der Variationsrechnung ist $f \mapsto T_f$ als Abbildung von $L^1_{loc}(\Omega)$ nach $\mathcal{D}'(\Omega)$ injektiv.

2. Sei $x \in \Omega$. Für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ wird durch

$$\delta_x(\varphi) := \varphi(x)$$

das sogenannte Dirac-Distribution zum Punkt x definiert. Es gibt aber kein $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ mit $\delta_x = T_f$. Denn anderenfalls würde für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ gelten:

$$y \mapsto \psi(y) := |y - x|^2 \varphi(y) \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Daraus folgt dann für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$0 = \psi(x) = \delta_x(\psi) = \int_{\Omega} f(y)|y - x|^2 \varphi(y) \, dy$$

und man erhält $f = 0$ fast überall, was

$$\int_{\Omega} f(y)\varphi(y) \, dy = 0 \neq \delta_x(\varphi)$$

bedeuten würde und folglich einen Widerspruch liefern würde.

Trotzdem schreibt man häufig formal:

$$\int_{\Omega} \delta_x(y)\varphi(y) \, dy = \varphi(x).$$

Satz 3.3.8. Sei $f_n : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = \left(\frac{n}{4\pi}\right)^{\frac{d}{2}} e^{-\frac{n|x|^2}{4}}$. Dann konvergiert f_n für $n \rightarrow \infty$ bezüglich der schwach* Topologie $\sigma(\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega))$ gegen δ_0 .

Definition 3.3.2 (distributionelle Ableitung). Die Abbildung ∂_x^β mit

$$\partial_x^\beta T(\varphi) = (-1)^{|\beta|} T\left(\partial_x^\beta \varphi\right)$$

heißt β -te distributionelle Ableitung der Distribution T .

Beachte:

Für die zu $\partial_x^\beta f$ gehörende Distribution $T_{\partial_x^\beta f}$ gilt mit Hilfe der partiellen Integration:

$$\begin{aligned} T_{\partial_x^\beta f}(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}^d} \partial_x^\beta f(x)\varphi(x) \, dx \\ &= (-1)^{|\beta|} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\partial_x^\beta \varphi(x) \, dx \\ &= (-1)^{|\beta|} T_f\left(\partial_x^\beta \varphi\right) \\ &= \left(\partial_x^\beta T_f\right)(\varphi). \end{aligned}$$

Die obige Definition verallgemeinert dies für Distributionen, die nicht von Funktionen induziert werden.

Beispiel 21. Sei $f(x) := |x|$. Für alle $\varphi \in C_c^\infty(-1, 1)$ gilt:

$$\begin{aligned} T_f(\partial_x \varphi) &= \int_{-1}^0 -x \partial_x \varphi(x) \, dx + \int_0^1 x \partial_x \varphi(x) \, dx \\ &= \int_{-1}^0 \varphi(x) \, dx - \int_0^1 \varphi(x) \, dx \\ &= -T_g(\varphi) \end{aligned}$$

mit

$$g(x) = \begin{cases} -1, & \text{wenn } x < 0, \\ 0, & \text{wenn } x = 0, \\ 1, & \text{wenn } x > 0. \end{cases}$$

g (eigentlich T_g) ist also die distributionelle Ableitung von f (eigentlich T_f). Da $g \in L^2(-1, 1)$, ist g auch die schwache Ableitung von f und somit $f \in H^1(-1, 1)$. Außerdem gilt für alle $\varphi \in C_c^\infty(-1, 1)$:

$$T_f(\partial_x^2 \varphi) = \int_{-1}^0 \partial_x \varphi(x) \, dx - \int_0^1 \partial_x \varphi(x) \, dx = 2\varphi(0) = 2\delta_0(\varphi).$$

Also ist $2\delta_0$ die zweite distributionelle Ableitung von f , aber keine zweite schwache Ableitung von f .

Satz 3.3.9. Die Abbildung $\partial_x^\beta : \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ mit $T \mapsto \partial_x^\beta T$ ist bezüglich $\sigma(\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega))$ stetig.

Eigenschaften der schwachen Konvergenz

Lemma 3.3.10. Sei X ein normierter Raum. Dann gilt:

1. Sind $x_k, x \in X$ und $k \in \mathbb{N}$, so gilt

$$x_k \rightharpoonup x \text{ in } X$$

für $k \rightarrow \infty$ genau dann, wenn

$$J_X x_k \xrightarrow{*} J_X x \text{ in } X''$$

für $k \rightarrow \infty$, wobei $J_X x(x') = x'(x)$ für $x \in X$ und $x' \in X'$ ist.

2. Sind $x'_k, x' \in X'$ und $k \in \mathbb{N}$, so gilt:

$$x'_k \rightharpoonup x' \text{ in } X'$$

impliziert

$$x'_k \xrightarrow{*} x' \text{ in } X'.$$

3. Der schwache Grenzwert und der schwach*-Grenzwert von Folgen sind eindeutig bestimmt.

4. Aus der Normkonvergenz folgt die schwache Konvergenz und die schwach*-Konvergenz.
 5. Aus $x'_k \xrightarrow{*} x'$ in X' für $k \rightarrow \infty$ folgt

$$\|x'\|_{X'} \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|x'_k\|_{X'}.$$

6. Aus $x_k \rightharpoonup x$ in X für $k \rightarrow \infty$ folgt

$$\|x\|_X \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|x_k\|_X.$$

7. Schwach konvergente Folgen sind beschränkt in X . Ist X vollständig, dann sind außerdem schwach*-konvergente Folgen beschränkt in X' .
 8. Aus $x_k \rightarrow x$ in X und $x'_k \xrightarrow{*} x'$ in X' für $k \rightarrow \infty$ folgt

$$x'_k(x_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x'(x) \text{ in } \mathbb{K},$$

falls X vollständig ist. Dieselbe Implikation gilt auch, wenn $x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x$ in X und $x'_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x'$ in X' gegeben ist, wobei hier die Vollständigkeit von X nicht notwendig ist.

Bemerkung 29. Die Aussage 6. nennt man auch Unterhalbstetigkeit der Norm bezüglich der schwachen Konvergenz von Folgen.

Beispiel 22.

- a) Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und sei $1 \leq p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Im Fall $p = 1$ sei μ zusätzlich σ -endlich. Für $g \in L^{p'}(\Omega)$ sei

$$J_{p'}(g)(f) := \int_{\Omega} f \bar{g} \, d\mu$$

für alle $f \in L^p(\Omega)$.

Dann ist $J_{p'} : L^{p'}(\Omega) \rightarrow (L^p(\Omega))'$ ein konjugiert linearer isometrischer Isomorphismus. Für $p = 2 = p'$ stimmt J_2 mit dem Isomorphismus aus dem Riesz'schen Darstellungssatz überein.

Folglich gilt für alle $f_k, f \in L^p(\Omega)$:

$$f_k \rightharpoonup f \text{ in } L^p(\Omega)$$

für $k \rightarrow \infty$ genau dann, wenn für alle $g \in L^{p'}(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} f_k \bar{g} \, d\mu \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f \bar{g} \, d\mu$$

gilt.

- b) Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge. Dann ist durch

$$J(\nu)(f) := \int_K f \, d\nu$$

ein linearer isometrischer Isomorphismus $J : rca(K) \rightarrow (C^0(K))'$, wobei $rca(K)$ der Raum der regulären signierten Borelmaße auf K ist, definiert. Folglich gilt für alle $f_k, f \in C^0(K)$:

$$f_k \rightharpoonup f \text{ in } C^0(K)$$

für $k \rightarrow \infty$ genau dann, wenn für alle $\nu \in rca(K)$:

$$\int_K f_k \, d\nu \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int_K f \, d\nu$$

gilt.

c) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ eine offene Teilmenge, $m \in \mathbb{N}$ und $1 \leq p \leq \infty$. Für $u_k, u \in W^{m,p}(\Omega)$ gilt

$$u_k \rightharpoonup u \text{ in } W^{m,p}(\Omega)$$

für $k \rightarrow \infty$ genau dann, wenn für alle $|s| \leq m$:

$$\partial_x^s u_k \rightharpoonup \partial_x^s u \text{ in } L^p(\Omega)$$

für $k \rightarrow \infty$ gilt. Die gleiche Aussage gilt für $W_0^{m,p}(\Omega)$.

Satz 3.3.11. Sei X ein separabler Banachraum. Dann ist die abgeschlossene Einheitskugel $\overline{B_1(0)}$ von X' schwach*-folgenkompakt.

Bemerkung 30. Dieser Satz gilt dann auch für jede andere abgeschlossene Kugel $\overline{B_R(x)}$. Insbesondere hat jede beschränkte Folge in X' eine schwach*-konvergente Teilfolge.

Bemerkung 31. Ist X nicht separabel, dann gilt die Aussage von Satz 3.3.11 im Allgemeinen nicht. Gegenbeispiel: Sei $X = L^\infty(]0, 1[)$ und für $\varepsilon > 0$:

$$T_\varepsilon f := \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon f(x) \, dx \quad \text{für alle } f \in L^\infty(]0, 1[).$$

Dann gilt $T_\varepsilon \in (L^\infty(]0, 1[))'$ mit $\|T_\varepsilon\| = 1$, aber für keine Nullfolge $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist $(T_{\varepsilon_n})_{n \in \mathbb{N}}$ schwach* konvergent in $(L^\infty(]0, 1[))'$. Denn angenommen, $(T_{\varepsilon_n})_{n \in \mathbb{N}}$ sei schwach* konvergent. Durch Übergang zu einer Teilfolge (die dann auch schwach* konvergent ist und wieder mit $(T_{\varepsilon_n})_{n \in \mathbb{N}}$ bezeichnet werde) kann angenommen werden, dass

$$1 > \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} \longrightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

gilt. Betrachte die durch

$$f(x) := (-1)^j \quad \text{für } \varepsilon_{j+1} < x < \varepsilon_j \text{ und } j \in \mathbb{N}$$

definierte Funktion $f \in X$. Es ist

$$T_{\varepsilon_n} f = \frac{1}{\varepsilon_n} \left((\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1})(-1)^n + \int_0^{\varepsilon_{n+1}} f(x) \, dx \right),$$

also

$$|T_{\varepsilon_n} f - (-1)^n| \leq \frac{1}{\varepsilon_n} \left(\varepsilon_{n+1} + \int_0^{\varepsilon_{n+1}} |f(x)| \, dx \right) \leq \frac{2\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Daraus folgt, dass die Folge $(T_{\varepsilon_n} f)_{n \in \mathbb{N}}$ die beiden Häufungspunkte ± 1 besitzt. Daher kann $(T_{\varepsilon_n})_{n \in \mathbb{N}}$ nicht schwach* konvergent sein.

Satz 3.3.12 (Satz von Alaoglu). Sei X ein Banachraum. Dann ist $\overline{B_1(0)} \subseteq X'$ überdeckungskompakt bezüglich der schwach* Topologie auf X' .

Definition 3.3.3. Sei X ein Banachraum. So wird X genau dann reflexiv genannt, wenn die Abbildung $J_X : X \rightarrow X''$ surjektiv (und damit bijektiv) ist.

Beispiel 23.

1. Jeder Hilbertraum ist reflexiv.
2. $L^p(\Omega)$ ist für $1 < p < \infty$ reflexiv.
3. $W^{m,p}(\Omega)$ ist für $1 < p < \infty$ reflexiv.
4. $C^0(K)$ mit $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt ist nicht reflexiv, falls K nicht aus endlich vielen Punkten besteht.

Lemma 3.3.13. Sei X ein Banachraum.

1. Ist X reflexiv, dann stimmen die schwach* Konvergenz und die schwache Konvergenz auf X' überein.
2. Ist X reflexiv, dann ist auch jeder abgeschlossene Unterraum von X reflexiv.
3. Ist $T : X \rightarrow Y$ ein Isomorphismus, dann ist X genau dann reflexiv, wenn Y reflexiv ist.
4. X ist genau dann reflexiv, wenn X' reflexiv ist.

Lemma 3.3.14. Für jeden Banachraum X gilt: falls X' separabel ist, dann ist auch X separabel.

Satz 3.3.15. Sei X ein reflexiver Banachraum. Dann ist $\overline{B_1(0)} \subseteq X$ schwach folgenkompakt.

Bemerkung 32. Dies gilt auch für jede andere abgeschlossene Kugel $\overline{B_R(x)} \subseteq X$. Insbesondere hat jede beschränkte Folge in X eine schwach konvergente Teilfolge.

Satz 3.3.16. Seien X, Y Banachräume und $T : X \rightarrow Y$ linear.

1. Ist $T \in K(X, Y)$, dann ist T vollstetig, das heißt, $x_n \rightharpoonup x$ in X für $n \rightarrow \infty$ impliziert $Tx_n \rightarrow Tx$ in Y für $n \rightarrow \infty$.
2. Ist X reflexiv und T vollstetig, dann ist $T \in K(X, Y)$.

Satz 3.3.17. Sei X ein normierter Raum und $M \subseteq X$ konvex und abgeschlossen. Dann ist M auch schwach folgenabgeschlossen, das heißt, für $x_k \in M$, $k \in \mathbb{N}$, gilt

$$x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x \text{ in } X \implies x \in M.$$

Theorem 3.3.18. Sei X ein reflexiver Banachraum und $M \subseteq X$ nicht leer, konvex und abgeschlossen. Dann gibt es zu $x_0 \in X$ ein $x \in M$ mit

$$\|x - x_0\| = \text{dist}(x_0, M).$$

A. Grundlagen der Topologie

Definition A.0.1 (Topologischer Raum). Sei X eine Menge und $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann heißt (X, \mathcal{T}) topologischer Raum, falls gilt:

$$(T1) \quad \emptyset \in \mathcal{T} \wedge X \in \mathcal{T},$$

$$(T2) \quad \mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{U \in \mathcal{T}'} U \in \mathcal{T},$$

$$(T3) \quad U_1, U_2 \in \mathcal{T} \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}.$$

Die Elemente von \mathcal{T} heißen offene Mengen.

Definition A.0.2. Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum.

- Die Teilmenge $A \subseteq X$ heißt abgeschlossen, falls $X \setminus A$ offen ist.
- Für eine Teilmenge $M \subseteq X$ heißt $\overset{\circ}{M} := \{x \in M : \exists U \in \mathcal{T} : U \subseteq M \wedge x \in U\}$ das Innere von M .
- $\overline{M} := X \setminus (X \setminus M)$ heißt der Abschluss von M .
- $\partial M := \overline{M} \setminus \overset{\circ}{M}$ heißt der Rand von M .
- M heißt dicht in X , falls $\overline{M} = X$.

Satz A.0.1. Beliebige Schnitte und endliche Vereinigungen von abgeschlossenen Mengen sind abgeschlossen. Die leere Menge \emptyset und X sind abgeschlossen.

Definition A.0.3 (Umgebung, Umgebungsfilter, Umgebungsbasis). Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum und $x \in X$.

1. $U \subseteq X$ heißt Umgebung von x , wenn es eine offene Menge \mathcal{O} mit $x \in \mathcal{O} \subseteq U$ gibt.
2. Das Mengensystem $\mathcal{U}(x)$ aller Umgebungen von x heißt Umgebungsfilter von x .
3. Eine Teilfamilie $\mathcal{V}(x) \subseteq \mathcal{U}(x)$ eines Umgebungsfilters $\mathcal{U}(x)$ heißt Umgebungsbasis von x , falls für jedes $U \in \mathcal{U}(x)$ ein $V \in \mathcal{V}(x)$ mit $V \subseteq U$ existiert.

Satz A.0.2.

a) Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum und $x \in X$. Dann gilt für den Umgebungsfilter $\mathcal{U}(x)$:

$$(U1) \quad \forall U \in \mathcal{U}(x) : x \in U.$$

$$(U2) \quad \forall U \in \mathcal{U}(x) \exists V \in \mathcal{U}(x) \forall y \in V : U \in \mathcal{U}(y).$$

$$(U3) \quad \forall U, V \subseteq X : ((U \subseteq V \wedge U \in \mathcal{U}(x)) \Rightarrow V \in \mathcal{U}(x)).$$

$$(U4) \quad \forall U, V \in \mathcal{U}(x) : U \cap V \in \mathcal{U}(x).$$

b) Sei X eine Menge und für jedes $x \in X$ existiere $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{P}(X)$, sodass (U1)–(U4) erfüllt seien. Dann gibt es genau einen topologischen Raum (X, \mathcal{T}) , sodass die $\mathcal{U}(x)$ Umgebungsfilter von x sind. Es ist $\mathcal{T} := \bigcup_{x \in X} \mathcal{O}(x) \cup \{\emptyset\}$ mit $\mathcal{O}(x) := \{\overset{\circ}{U} : U \in \mathcal{U}(x)\}$ und $\overset{\circ}{U} := \{y \in X : U \in \mathcal{U}(y)\}$.

Satz A.0.3.

1. Jeder metrische Raum induziert einen topologischen Raum. In diesem Fall besitzt jeder Punkt x des topologischen Raumes eine abzählbare Umgebungsbasis $\mathcal{V}(x)$.
2. Nicht jeder topologische Raum ist metrisierbar (das heißt von einem metrischen Raum induziert).

Definition A.0.4 (stärker oder feiner bzw. schwächer oder gröber). Seien $(X, \mathcal{T}_1), (X, \mathcal{T}_2)$ topologische Räume. Dann heißt \mathcal{T}_2 stärker oder feiner als \mathcal{T}_1 beziehungsweise \mathcal{T}_1 schwächer oder gröber als \mathcal{T}_2 , falls $\mathcal{T}_1 \subsetneq \mathcal{T}_2$ ist.

Definition A.0.5 (Hausdorff-Raum). Ein topologischer Raum (X, \mathcal{T}) heißt Hausdorff-Raum, wenn gilt:

$$\forall x, y \in X \quad (x \neq y \Rightarrow \exists U \in \mathcal{U}(x) \exists V \in \mathcal{U}(y) : U \cap V = \emptyset).$$

Definition A.0.6 (Grenzwert). Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq (X, \mathcal{T})$ konvergiert gegen $x \in X$ (Kurzschreibweise: $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$)

$$:\Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(x) \exists n_V \in \mathbb{N} \forall n \geq n_V : x_n \in V.$$

Man nennt dann x den Grenzwert von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Satz A.0.4. Grenzwerte von Folgen in Hausdorff-Räumen sind eindeutig bestimmt.

Definition A.0.7 (folgenabgeschlossen). Sei X, \mathcal{T} ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt folgenabgeschlossen

$$:\Leftrightarrow \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A \quad (x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \Rightarrow x \in A).$$

Satz A.0.5. Falls A abgeschlossen ist, ist A auch folgenabgeschlossen. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

Definition A.0.8 (stetig). Seien (X, \mathcal{T}_X) , (Y, \mathcal{T}_Y) topologische Räume. Eine Abbildung $T : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ heißt stetig

$$:\Leftrightarrow \forall x \in X \forall V \in \mathcal{V}(T_x) \exists U \in \mathcal{V}(x) : T(U) \subseteq V.$$

Satz A.0.6.

1. Es sind äquivalent:

- a) T ist stetig.
- b) Urbilder offener Mengen sind offen.
- c) Urbilder abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.

2. Wenn T stetig ist, dann ist T auch folgenstetig, das heißt aus $x_n \rightarrow x$ folgt $T(x_n) \rightarrow T(x)$. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

Definition A.0.9 (überdeckungskompakt, folgenkompakt). Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum.

1. Eine Teilmenge $K \subseteq X$ heißt (überdeckungs-)kompakt
 $:\Leftrightarrow$ Jede Überdeckung von K durch offene Mengen aus X besitzt eine endliche Teilüberdeckung.
2. Eine Teilmenge $K \subseteq X$ heißt folgenkompakt
 $:\Leftrightarrow$ Jede Folge in K besitzt eine konvergente Teilfolge, deren Grenzwert in K liegt.

Satz A.0.7. Kompaktheit und Folgenkompaktheit sind im Allgemeinen nicht äquivalent.

Definition A.0.10 (separabel). Ein topologischer Raum (X, \mathcal{T}) heißt separabel
 $:\Leftrightarrow X$ enthält eine abzählbare dichte Teilmenge.

Satz A.0.8 (Relativtopologie, Produkttopologie).

1. Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum und $A \subsetneq X$. Dann ist (A, \mathcal{T}_A) ein topologischer Raum mit der sogenannten Relativtopologie $\mathcal{T}_A := \{U \cap A \mid U \in \mathcal{T}\}$.
2. Seien $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$, wobei I eine beliebige Indexmenge ist, topologische Räume und sei $X = \bigotimes_{i \in I} X_i$ das kartesische Produkt der Mengen X_i . Dann lässt sich X mit der sogenannten Produkttopologie \mathcal{T} versehen, wobei genau dann $U \in \mathcal{T}$ ist, wenn U als Vereinigung von Mengen der Form $(U_i)_{i \in I}$ mit $U_i \in \mathcal{T}_i$ für alle $i \in I$ und $U_i = X_i$ für fast alle $i \in I$ darstellbar ist.

Satz A.0.9 (Satz von Tychonov). Seien $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$, wobei I eine beliebige Indexmenge ist, topologische Räume und $X = \bigotimes_{i \in I} X_i$ versehen mit der Produkttopologie. Dann ist X genau dann kompakt, wenn alle X_i kompakt sind.

Bemerkung 1. Dieser Satz ist äquivalent zum Auswahlaxiom.

Literatur

- [1] Hans Wilhelm Alt. *Lineare Funktionalanalysis*. 6. Aufl. Springer, 2012.
- [2] John B. Conway. *A Course in Functional Analysis*. Springer, 1990.
- [3] Harro Heuser. *Funktionalanalysis: Theorie und Anwendung*. 4. Aufl. Teubner, 2006.
- [4] Dirk Werner. *Funktionalanalysis*. 7. Aufl. Springer, 2011.