**Blatt 1 Funktionalanalysis 14.10.2014**

---

**Aufgabe 1.**

**a)** Zeigen Sie, dass der Folgenraum $\ell^2(\mathbb{C}) = \{x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \langle x, x\rangle < \infty\}$ zusammen mit der Abbildung $\langle x, y\rangle := \sum_{j=1}^{\infty} x_j \overline{y_j}$ ein Skalarproduktraum ist.

**b)** Sei $a < b \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass der Vektorraum der stetigen Funktionen $C^0([a,b],\mathbb{C})$ zusammen mit $\langle x, y\rangle := \int_a^b x(t)\overline{y(t)}\,\mathrm{d}t$ ein Skalarproduktraum ist.

**Aufgabe 2.**

**a)** Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in C^0([a,b],\mathbb{C})$ gilt

$$\left|\int_a^b x(t)\overline{y(t)}\,dt\right| \leqq \sqrt{\int_a^b |x(t)|^2\,dt} \cdot \sqrt{\int_a^b |y(t)|^2\,dt}\,.$$

Wann gilt oben Gleichheit?

**b)** Existiert eine Konstante $C > 0$, sodass

$$\forall f \in C^0([-2,2],\mathbb{C}) : \qquad \left|\int_{-2}^2 f(t)\,dt\right| \leqq C\left(\int_{-2}^2 |f(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

gilt?

**Aufgabe 3.**

**a)** Zeigen Sie, dass der Vektorraum $C([a,b],\mathbb{C})$ mit der Abbildung $||f||_{C^0} := \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$ ein normierter Raum ist.
Gilt diese Aussage auch für $C^k([a,b],\mathbb{C})$ mit $||f||_{C^k} := \sum_{j=0}^k \max_{x\in[a,b]} |\frac{d^j}{dx^j} f(x)|$?

**b)** Sei $(X, ||\cdot||)$ ein normierter Raum. Zeigen Sie:

$$\forall x, y \in X : \quad ||x-y|| \geqq |\,||x|| - ||y||\,|\,.$$

**Aufgabe 4.**

**a)** Sei $(X, ||\cdot||)$ ein normierter Raum und $[\,\cdot\,]$ eine Halbnorm auf $X$. Zeigen Sie, dass

$$||\cdot||^* := ||\cdot|| + [\,\cdot\,]$$

eine Norm auf $X$ definiert.

**b)** Zeigen Sie, dass $[\,\cdot\,]_{C^{0,\alpha}}$ eine Halbnorm, aber keine Norm auf $C^{0,\alpha}(\mathbb{R})$ ist.

**c)** Zeigen Sie, dass $(C^{0,\alpha}(\mathbb{R}), ||\cdot||_{C^{0,\alpha}})$ ein normierter Raum ist.