Universität Stuttgart
Fachbereich Mathematik

PD Dr. W.-P. Düll

Blatt 2 Funktionalanalysis 21.10.2014

Aufgabe 5.

Sei $(\Omega, \Sigma, \lambda)$ ein endlicher Maßraum, d.h. ein Maßraum mit $\lambda(\Omega) < \infty$. Zeigen Sie, dass für $1 \leqq p < q \leqq \infty$ gilt $L^q(\Omega) \subseteqq L^p(\Omega)$ und dass eine Konstante $C > 0$ existiert, so dass gilt:

$$\forall f \in L^q(\Omega): \ ||f||_{L^p} \leqq C||f||_{L^q}\,.$$

Aufgabe 6.

Zeigen Sie:

a) Sei $(X, ||\cdot||_X)$ ein normierter Raum. Dann ist $||\cdot||_X : (X, ||\cdot||_X) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ eine stetige Abbildung.

b) Sei $(Y, \langle\cdot,\cdot\rangle_Y)$ ein Skalarproduktraum und $||\cdot||_Y$ die von $\langle\cdot,\cdot\rangle_Y$ induzierte Norm. Dann ist $\langle\cdot,\cdot\rangle_Y : (Y \times Y, ||\cdot||_\infty) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$, wobei $||(y_1, y_2)||_\infty := \max_{j=1,2} ||y_j||_Y$ für alle $(y_1, y_2) \in Y \times Y$ ist, eine stetige Abbildung.

c) Sei (Z, d) ein metrischer Raum. Dann ist $d : (Z \times Z, d_\infty) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$, wobei $d_\infty((a_1, a_2), (b_1, b_2)) := \max_{j=1,2} d(a_j, b_j)$ für alle $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in Z \times Z$ ist, eine stetige Abbildung.

Aufgabe 7.

Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und A eine nichtleere Teilmenge von X. Zeigen Sie, dass Folgendes äquivalent ist:

(i) (A, d) ist ein vollständiger metrischer Raum.

(ii) A ist eine abgeschlossene Teilmenge von X.

Aufgabe 8.

Zeigen Sie:

a) Der normierte Raum $(C^{0,\alpha}(\Omega), ||\cdot||_{C^{0,\alpha}})$ mit $\Omega \subseteqq \mathbb{R}^n$ offen, ist vollständig.

b) Der normierte Raum $(C^1([a, b]), ||\cdot||_{C^1})$, $a < b \in \mathbb{R}$, ist vollständig.

c) Der normierte Raum $(C^1([-1, 1]), ||\cdot||_{C^0})$ ist nicht vollständig.
Hinweis: Betrachten Sie die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteqq C^1([-1, 1])$ mit $f_n(x) := \left(x^2 + \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Hinweis: Die Tatsache, dass die Räume stetiger Funktionen mit der Supremumsnorm vollständig sind, wird in der Vorlesung gezeigt und darf daher ohne Beweis verwendet werden.

Aufgabe 9.

Sei $(X, ||\cdot||)$ ein normierter Raum. Zeigen Sie, dass Folgendes äquivalent ist:

(i) $(X, ||\cdot||)$ ist ein Banachraum.

(ii) Jede absolut konvergente Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ ist konvergent.

Hinweis: Eine Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ heißt absolut konvergent, wenn $\sum_{i=1}^{\infty} ||a_i|| < \infty$. Betrachten Sie zum Beweis der Richtung $(i) \Rightarrow (ii)$ die Folge $b_n := \sum_{i=1}^{n} a_i$ und verwenden Sie zum Beweis der Richtung $(ii) \Rightarrow (i)$ folgende Aussage: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Dann gibt es eine Teilfolge $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$, sodass

$$||x_{k_{n+1}} - x_{k_n}|| \leqq 2^{-n}.$$