Blatt 3 Funktionalanalysis 27.10.2014

Aufgabe 10.

Sei (X, d) ein metrischer Raum, K eine kompakte Teilmenge. Zeigen Sie:

a) K ist eine beschränkte Teilmenge von X.

b) K ist eine abgeschlossene Teilmenge von X.

Aufgabe 11.

Gegeben sei der normierte Raum $X := C^0([0,1])$ mit $||\cdot||_{C^0}$ und $M = \{f \in X : \ ||f||_{C^0} \leqq 1\}$. Zeigen Sie:

a) M ist eine beschränkte, abgeschlossene Teilmenge von X.

b) M ist nicht kompakt in X. Betrachten Sie dazu die Funktionenfolge $f_n(x) := x^n$.

c) Die Menge aller konstanten Funktionen $g \in M$ ist eine kompakte Teilmenge von X.

Aufgabe 12.

Sei K eine kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes (X, d_X) und $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig.

a) Zeigen Sie, dass $f(K)$ eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist.

b) Zeigen Sie, dass f auf K ein absolutes Minimum und ein absolutes Maximum annimmt, d.h. es gibt $k_{min}, k_{max} \in K$, sodass

$$\forall k \in K : \qquad f(k_{min}) \ \leqq \ f(k) \ \leqq \ f(k_{max}).$$

Hinweis zu $a)$: Betrachten Sie zu einer beliebigen Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subsetneqq f(K)$ eine Folge der Art $y_n \in f^{-1}(\{x_n\})$, wenden Sie die Kompaktheit von K auf $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an und verwenden Sie zum Schluss die Stetigkeit von f.

Aufgabe 13.

Sei K eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und $0 < \alpha < \beta \leqq 1$. Zeigen Sie, dass jede beschränkte Teilmenge von $(C^{0,\beta}(K), ||\cdot||_{C^{0,\beta}})$ relativ kompakt in $(C^{0,\alpha}(K), ||\cdot||_{C^{0,\alpha}})$ ist.

Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Arzelà-Ascoli.

Aufgabe 14.

Zeigen Sie:

a) $\frac{d}{dx} : (C^1([0,1]), ||\cdot||_{C^0}) \longrightarrow (C^0([0,1]), ||\cdot||_{C^0})$ ist kein stetiger Operator.

b) $\frac{d}{dx} : (C^1([0,1]), ||\cdot||_{C^1}) \longrightarrow (C^0([0,1]), ||\cdot||_{C^0})$ ist ein stetiger Operator.