Universität Stuttgart
Fachbereich Mathematik

PD Dr. W.-P. Düll

Blatt 4 **Funktionalanalysis** **3.11.2014**

Aufgabe 15.

Seien E, F, G normierte Räume und $Lin(E,F)$ die Menge aller stetigen, linearen Abbildungen von E nach F, sowie $Lin(E,G)$ die Menge aller stetigen, linearen Abbildungen von E nach G. Zeigen Sie:

a) Für alle $A \in Lin(F,G)$ und $B \in Lin(E,F)$ ist $A \circ B \in Lin(E,G)$ und es ist

$$||A \circ B|| \leqq ||A|| \cdot ||B||.$$

b) Sei $A \in Lin(F,G)$ fest gewählt. Dann ist $T : Lin(E,F) \longrightarrow Lin(E,G)$ mit

$$B \longmapsto A \circ B$$

eine stetige, lineare Abbildung (d.h. $T \in Lin(Lin(E,F), Lin(E,G))$).

Aufgabe 16.

Sei $\psi : [0,1]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass $T : C^0([0,1]) \longrightarrow C^0([0,1])$ mit

$$\forall f \in C^0([0,1]) : \qquad (Tf)(x) := \int_0^1 \psi(x,y) f(y) dy$$

eine stetige, lineare Abbildung ist mit

$$||T|| \;=\; \sup_{x \in [0,1]} \int_0^1 |\psi(x,y)| dy.$$

Aufgabe 17.

Betrachten Sie die Integralgleichung

$$f(x) \;=\; g(x) + \int_0^1 xyf(y)dy \tag{1}$$

in $C^0([0,1])$ mit $g(x) := x^2$.

a) Zeigen Sie, dass die Gleichung eine eindeutige Lösung $f \in C^0([0,1])$ besitzt. Interpretieren Sie dazu (1) als Gleichung

$$(Id - T)f = g$$

mit einem geeigneten Operator $T \in Lin(C^0([0,1]), C^0([0,1]))$.

b) Zeigen Sie durch vollständige Induktion:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \qquad (T^{n+1}g)(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^n (Tg)(x).$$

c) Berechnen Sie die Lösung von (1) mit Hilfe der Neumann'schen Reihe.

Aufgabe 18.

Seien $(X, ||\cdot||_X), (Y, ||\cdot||_Y)$ Banachräume und Z ein dichter Untervektorraum von X. Sei $T : Z \longrightarrow Y$ eine stetige, lineare Abbildung. Zeigen Sie: Es existiert genau eine stetige, lineare Abbildung $\tilde{T} : X \longrightarrow Y$, sodass

$$\forall z \in Z : \qquad \tilde{T}z \ = \ Tz$$

ist, und es gilt $||\tilde{T}|| = ||T||$.