Blatt 5 Funktionalanalysis 10.11.2014

Aufgabe 19.

Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein reeller Hilbertraum und $A \subseteqq H$ nichtleer, abgeschlossen und konvex. Sei außerdem $l : H \to \mathbb{R}$ eine stetige lineare Abbildung und $E : H \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$E(x) = \frac{1}{2}\langle x,\, x\rangle - l(x)\,.$$

a) Zeigen Sie ohne Verwendung des Rieszschen Darstellungssatzes, dass E auf A ein eindeutiges Minimum annimmt.

Hinweis: Modifizieren Sie die Argumentation des Beweises von Satz 2.1.1 der Vorlesung.

b) Bestimmen Sie für E die Gâteaux-Ableitung und die Fréchet-Ableitung, sofern sie existieren. Was lässt sich über die Werte der Gâteaux-Ableitung und der Fréchet-Ableitung an der Stelle $x_0 \in A$, an der E das Minimum annimmt, aussagen?

Aufgabe 20.

Gegeben sei der Banachraum $B := (\{f \in C^0([0,1]) : f(0) = 0\}, ||\cdot||_{C^0})$. Zeigen Sie, dass $A := \{f \in B : \int_0^1 f(x)\,dx = 0\}$ eine nichtleere, abgeschlossene und konvexe Teilmenge von B ist, welche die Eigenschaft besitzt, dass nicht für jede Funktion $g \in B$ ein bestapproximierendes Element in A existiert.

Hinweis: siehe Alt, Lineare Funktionalanalysis.

Aufgabe 21.

Berechnen Sie für $f \in L^2([-\pi,\pi])$ mit $f(x) = x$ die beste Approximation in dem von u_1 und u_2 mit

$$u_1(x) = \sin(x), \qquad u_2(x) = \sin(2x)$$

aufgespannten Unterraum von $L^2([-\pi,\pi])$ und berechnen Sie auf möglichst einfache Weise den Wert der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} t\sin(nt)\,dt\right)^2 .$$

Aufgabe 22.

Zeigen Sie, dass jeder unendlich-dimensionale separable Hilbertraum über $\mathbb{K}$ isometrisch isomorph zu $\ell^2_{\mathbb{K}}$ ist.