Blatt 7 Funktionalanalysis 25.11.2014

Aufgabe 28.

Sei $\Omega \subsetneqq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes und konvexes Normalgebiet, $f \in L^2(\Omega)$ mit $\int_\Omega f\,dx = 0$ und

$$E(w) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla w|^2 - fw\,d\lambda\,.$$

Zeigen Sie, dass E auf $H^1(\Omega)$ (beachten Sie, es ist $H^1(\Omega) \neq H_0^1(\Omega)$) eine bis auf eine Konstante eindeutige Minimalstelle u besitzt und u eine bis auf eine Konstante eindeutige schwache Lösung des homogenen Neumann-Problems für die Poissongleichung ist, d.h. dass

$$\forall \varphi \in H^1(\Omega): \int_\Omega \nabla u \bullet \nabla \varphi - f\varphi\,d\lambda = 0$$

gilt, auf zwei verschiedene Arten, nämlich

a) mit Hilfe einer Minimalfolge,

b) mit Hilfe des Rieszschen Darstellungssatzes.

Aufgabe 29.

Zeigen Sie: Sei $\Omega \subsetneqq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Normalgebiet, $f \in L^2(\Omega)$ und u die Minimalstelle von

$$E(w) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla w|^2 - fw\,d\lambda$$

auf $H_0^1(\Omega)$. Dann existiert eine Konstante $C > 0$ mit

$$||u||_{H^1(\Omega)} \leqq C\,||f||_{L^2(\Omega)}\,.$$

Hinweis: Setzen Sie $\varphi = u$ in die schwache Formulierung der Poissongleichung ein und schätzen Sie dann ab. Alternativ können Sie auch die Normidentität aus dem Rieszschen Darstellungssatz ausnutzen.

Aufgabe 30.

Zeigen Sie, dass unter den im Vorlesungsskript angegebenen Voraussetzungen

a) genau eine schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ des elliptischen Dirichlet-Problems existiert,

b) genau eine schwache Lösung $u \in H^1(\Omega)$ des elliptischen Neumann-Problems existiert.