Universität Stuttgart
Fachbereich Mathematik

PD Dr. W.-P. Düll

Blatt 9 Funktionalanalysis 8.12.2014

Aufgabe 35.

a) Sei $X = \ell^p$, $1 \leqq p \leqq \infty$, versehen mit der $||\cdot||_{\ell^p}$-Norm und der sogenannte Rechtsshift $R \in Lin(X)$ definiert durch $R(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0, x_1, x_2, ...)$. Zeigen Sie, dass $\sigma_p(R) = \emptyset$, aber $0 \in \sigma(R)$ ist und dass der Spektralradius von R gleich 1 ist.

b) Sei X wie oben und der sogenannte Linksshift $L \in Lin(X)$ definiert durch $L(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. Bestimmen Sie $\sigma_p(L)$, $\sigma(L)$ sowie den Spektralradius von L.

c) Sei X wie oben, wobei hier nur der Fall $p = \infty$ betrachtet werden soll, $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ und $M \in Lin(X)$ definiert durch $M(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\eta_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Bestimmen Sie $\sigma_p(M)$ und $\sigma(M)$.

Aufgabe 36.

a) Sei $X = C_0^0(\mathbb{R}_0^+, \mathbb{C}) := \{f \in C^0(\mathbb{R}_0^+, \mathbb{C}) : lim_{x\to\infty} f(x) = 0\}$ versehen mit der $||\cdot||_{C^0}$-Norm und $L \in Lin(X)$ definiert durch $Lf(x) = f(x+1)$. Bestimmen Sie $\sigma_p(L)$ und $\sigma(L)$.

b) Sei $Y = C^0([0,1], \mathbb{C})$ versehen mit der $||\cdot||_{C^0}$-Norm, $g \in Y$ injektiv und $M \in Lin(Y)$ definiert durch $Mf(x) = g(x)f(x)$. Bestimmen Sie $\sigma_p(M)$ und $\sigma(M)$.

Aufgabe 37.

Sei $Y = C^0([0,1], \mathbb{C})$ versehen mit der $||\cdot||_{C^0}$-Norm und $T \in Lin(Y)$ definiert durch $Tf(x) = \int_0^x f(s)\,ds$. Bestimmen Sie $\sigma_p(T)$ und $\sigma(T)$.

Hinweis: T ist kompakt und außerdem gilt $\frac{d}{dx} Tf = f$.

Aufgabe 38.

Zeigen Sie: Sei H ein unendlich-dimensionaler separabler $\mathbb{C}$-Hilbertraum und $T \neq 0$ ein kompakter, selbstadjungierter Operator auf H. Dann existiert ein isometrischer Isomorphismus $U : H \to \ell^2_{\mathbb{C}}$ und eine Folge $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty_{\mathbb{R}}$, so dass $T = U^{-1} D_\Lambda U$ gilt, wobei $D_\Lambda \in Lin(\ell^2_{\mathbb{C}})$ durch $D_\Lambda(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert ist.