Blatt 10 Funktionalanalysis 15.12.2014

Aufgabe 39.

Zeigen Sie: Sei H ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum und $T \neq 0$ ein positiv semidefiniter, kompakter, selbstadjungierter Operator auf H. Dann besitzt T eine Wurzel, d.h. es existiert ein positiv semidefiniter, stetiger, linearer Operator S auf H mit $S^2 = T$.

Aufgabe 40.

Zeigen Sie mit Hilfe von Satz 2.3.15 des Vorlesungsskripts und ohne Verwendung des Spektralradius die folgende Aussage: Sei H ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum und T ein kompakter, selbstadjungierter Operator auf H mit $\sigma(T) = 0$. Dann ist $T = 0$.

Hinweis: Zeigen Sie, dass $\langle Tu, v \rangle_H = 0$ für alle $u, v \in H$ gilt.

Aufgabe 41.

Bestimmen Sie alle Eigenwerte λ und alle reellwertige Eigenfunktionen u von

$$u'' + \lambda u = 0 \quad \text{auf } \Omega = (0, 2\pi), \qquad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Aufgabe 42.

Sei $\Omega \subsetneqq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes, stückweise C^1-berandetes Gebiet. Leiten Sie her, dass es abzählbar unendlich viele linear unabhängige Lösungen u_k des homogenen Dirichlet-Randwertproblems für die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u_k - \Delta u_k = 0 \quad \text{auf } \Omega \times \mathbb{R}, \qquad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \times \mathbb{R}$$

von der Form $u_k(x, t) = a_k(t) v_k(x)$ gibt, wobei v_k eine Eigenfunktion des Laplace-Operators ist, und geben Sie jeweils eine explizite Darstellung für die Funktion a_k in Abhängigkeit von dem zur Eigenfunktion v_k gehörenden Eigenwert λ_k an.