Universität Stuttgart
Fachbereich Mathematik

PD Dr. W.-P. Düll

Blatt 11 Funktionalanalysis 13.1.2015

Aufgabe 43.

Beweisen Sie den Trennungssatz (Theorem 3.1.5) für den Spezialfall $X = \mathbb{R}^n$ mit Methoden der Linearen Algebra und Analytischen Geometrie.

Hinweis: Verwenden Sie die bereits bewiesene Tatsache, dass ein bestapproximierendes Element aus M an x_0 existiert und konstruieren Sie die Hyperebene $\{x \in \mathbb{R}^n : x'(x) = \alpha\}$ explizit.

Aufgabe 44.

Zeigen Sie:

a) Jeder Banachraum ist entweder endlich-dimensional oder er besitzt eine überabzählbare Basis.

Hinweis: Verwenden Sie den Baireschen Kategoriensatz.

b) Der Vektorraum aller Polynome auf dem Intervall $[0, 1]$ ist bezüglich keiner Norm vollständig.

Aufgabe 45.

Zeigen Sie: Seien X, Y Banachräume, $A : X \to Y$ und $B : Y' \to X'$ linear. Gilt $y'(Ax) = By'(x)$ für alle $x \in X$ und alle $y' \in Y'$, dann sind A und B stetig.

Aufgabe 46.

Sei X ein Banachraum, Y ein normierter Raum und $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $Lin(X, Y)$, so dass $T(x) := \lim_{n\to\infty} T_n(x)$ für alle $x \in X$ existiert.

a) Zeigen Sie, dass $T \in Lin(X, Y)$ ist mit $||T|| \leqq \liminf_{n\to\infty} ||T_n|| < \infty$.

b) Geben Sie ein Beispiel dafür an, dass $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht in der Operatornorm gegen T konvergiert.