Universität Stuttgart
Fachbereich Mathematik

PD Dr. W.-P. Düll

Blatt 12 Funktionalanalysis 20.1.2015

Aufgabe 47.

Auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum X seien zwei Normen $||\cdot||_1$ und $||\cdot||_2$ definiert und bezüglich beider Normen sei X vollständig. Zeigen Sie: Existiert ein $C > 0$, so dass $||x||_1 \leqq C||x||_2$ für alle $x \in X$ gilt, dann sind beide Normen äquivalent.

Aufgabe 48.

Zeigen Sie: Seien X, Y Banachräume und $b : X \times Y \to \mathbb{K}$ sesquilinear, wobei $x \mapsto b(x, y)$ für jedes $y \in Y$ stetig sei sowie $y \mapsto b(x, y)$ für jedes $x \in X$ stetig sei. Dann gibt es eine Konstante $C > 0$, so dass $|b(x, y)| \leqq C||x||_X||y||_Y$ für alle $x \in X$ und alle $y \in Y$ gilt.

Aufgabe 49.

Zeigen Sie:

a) Sei E ein normierter Raum und $P \in Lin(E)$ eine stetige Projektion. Dann ist P genau dann kompakt wenn der Bildraum $\mathcal{R}(P)$ endliche Dimension hat.

b) Seien X, Y Banachräume und $T : X \to Y$ sei nuklear, d.h. es gibt $\lambda_k \in \mathbb{K}$, $x'_k \in X'$ und $y_k \in Y$ für $k \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| < \infty$, $||x'_k||_{X'} = 1$ und $||y_k||_Y = 1$, so dass

$$T(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x'_k(x) y_k$$

für alle $x \in X$ gilt. Dann ist T kompakt.

Aufgabe 50.

a) Zeigen Sie: Sei X ein Banachraum, $T \in Lin(X)$ und T' der adjungierte Operator zu T. Dann gilt $\sigma(T') = \sigma(T)$ und für die Resolvente gilt $R(\lambda; T') = R(\lambda; T)'$ für alle $\lambda \in \rho(T)$.

b) Sei $X = \ell^2$, versehen mit der $||\cdot||_{\ell^2}$-Norm und $\mathcal{R} \in Lin(X)$ der Rechtsshift (siehe Aufgabe 35). Bestimmen Sie den adjungierten Operator $\mathcal{R}'$ zu $\mathcal{R}$ sowie $\sigma(\mathcal{R})$.