Blatt 13 Funktionalanalysis 26.1.2015

Aufgabe 51.

Beweisen Sie die Fredholmsche Alternative (Theorem 3.2.8) für den Spezialfall von linearen Gleichungssystemen im $\mathbb{R}^n$ mit Methoden der Linearen Algebra.

Aufgabe 52.

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $\lambda, f \in L^2([a,b])$. Zeigen Sie, dass

$$-u'' + \lambda u = f \quad \text{auf } [a,b], \qquad u'(a) = u'(b) = 0$$

genau dann eine schwache Lösung besitzt, wenn f bezüglich des L^2-Skalarproduktes orthogonal zu allen schwachen Lösungen von

$$-v'' + \lambda v = 0 \quad \text{auf } [a,b], \qquad v'(a) = v'(b) = 0$$

ist.

Aufgabe 53.

Beweisen Sie das Lemma 3.3.2 der Vorlesung.

Aufgabe 54.

Sei H ein Hilbertraum, $||\cdot||_H$ die vom Skalarprodukt auf H induzierte Norm, $x \in H$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in H. Zeigen Sie:

$$x_n \to x \ \ (\text{bzgl. } ||\cdot||_H) \ \text{ für } n \to \infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_n \rightharpoonup x \ \ \wedge \ \ ||x_n||_H \to ||x||_H \ \text{ für } n \to \infty$$