Universität Stuttgart
Fachbereich Mathematik

PD Dr. W.-P. Düll

Blatt 14 **Funktionalanalysis** **2.2.2015**

Aufgabe 55.

Seien X, Y Banachräume, $T \in Lin(X,Y)$, $x \in X$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Zeigen Sie:

$$x_n \rightharpoonup x \ \text{ für } \ n \to \infty \qquad \Longrightarrow \qquad Tx_n \rightharpoonup Tx \ \text{ für } \ n \to \infty$$

Aufgabe 56.

Sei $I \subsetneqq \mathbb{R}$ ein offenes, beschränktes Intervall und $1 < p < \infty$. Zeigen Sie:

a) Sei $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ mit $g(x+k) = g(x)$ für ein $k > 0$ und fast alle $x \in \mathbb{R}$ und $f_n(x) = g(nx)$. Dann gilt:

$$f_n \rightharpoonup \frac{1}{k}\int_0^k g(x)\,dx \quad \text{in } L^p(I) \ \text{ für } \ n \to \infty$$

b) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $0 < \theta < 1$ und

$$f_n(x) = \begin{cases} a\,, & k < nx < k+\theta\,,\ k \in \mathbb{Z}\,, \\ b\,, & k+\theta < nx < k+1\,,\ k \in \mathbb{Z}\,. \end{cases}$$

Dann gilt:

$$f_n \rightharpoonup \theta a + (1-\theta)b \quad \text{in } L^p(I) \ \text{ für } \ n \to \infty$$

Aufgabe 57.

Zeigen Sie: Ein reflexiver Banachraum ist genau dann separabel wenn sein Dualraum separabel ist.

Aufgabe 58.

Zeigen Sie: Sei X ein reflexiver Banachraum, $E : X \to \mathbb{R}$ unterhalbstetig bezüglich der schwachen Konvergenz von Folgen (d.h. aus $x_n \rightharpoonup x$ in X für $n \to \infty$ folgt $E(x) \leqq \liminf_{n\to\infty} E(x_n)$) und es gelte $E(x) \to +\infty$ für $\|x\| \to +\infty$. Dann nimmt E auf X ein Minimum an.