

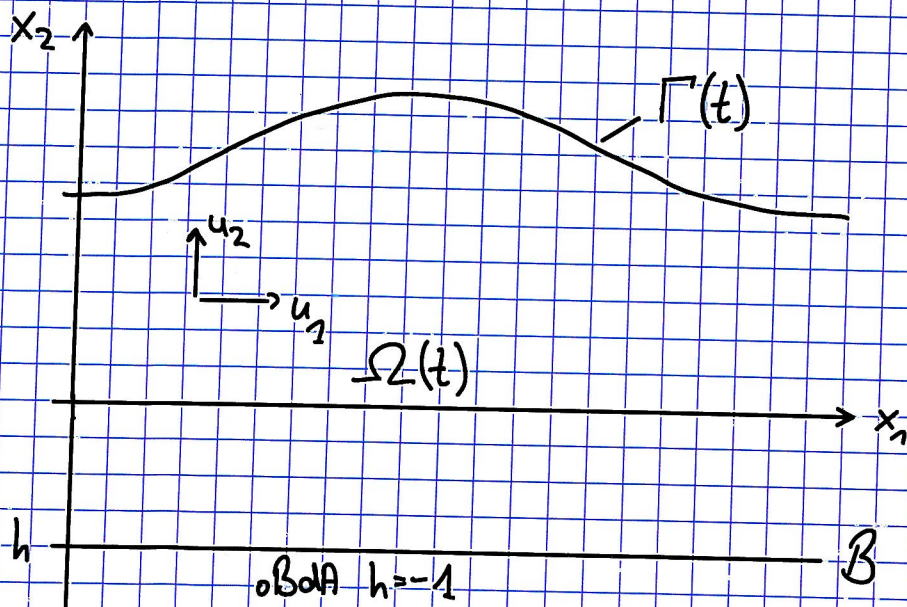
# Modulationsgleichungen

## I. Modulationsgleichungen für dispersive Systeme

### 1. Die KdV-Approximation

In NPDG haben wir zwei typische Situationen für die KdV-Approximation kennengelernt:

- 1.) Die Wasserwellengleichungen in zwei Raumdimensionen mit endlicher Wassertiefe



$$\Omega(t) = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in \mathbb{R}, -1 < x_2 < \eta(x_1, t) \right\},$$

$$\Gamma(t) = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in \mathbb{R}, x_2 = \eta(x_1, t) \right\},$$



$$B = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in \mathbb{R}, x_2 = -1 \right\},$$

$$\begin{cases} \partial_t \eta = \mathcal{K}(\eta) u_2 - u_1 \partial_{x_2} \eta & \text{auf } \Gamma(t), \\ \partial_t u_2 = -\partial_{x_2} \eta - \frac{1}{2} \partial_{x_1} \left( (u_1)^2 + (\mathcal{K}(\eta) u_2)^2 \right) + b \partial_{x_2}^2 \left( \frac{\partial_{x_2} \eta}{\sqrt{1 + (\partial_{x_2} \eta)^2}} \right), \end{cases}$$

$b \geq 0$  Bandzahl,

wobei  $\mathcal{K}(\eta)$  eindeutig definiert ist durch

$$u_2 = \partial_{x_2} \phi \Big|_{\Gamma} = \mathcal{K}(\eta) \partial_{x_1} \phi \Big|_{\Gamma} = \mathcal{K}(\eta) u_1$$

$$\begin{cases} \Delta \phi = 0 & \text{in } \Omega \\ \partial_{x_1} \phi \Big|_{\Gamma} = u_1 \Big|_{\Gamma} \\ \partial_{x_2} \phi \Big|_B = 0 \end{cases}$$

Setzt man den Ansatz

$$\begin{pmatrix} \eta \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} (x, t) = \varepsilon^2 A(\varepsilon(x \pm t), \varepsilon^3 t) \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\varepsilon^3),$$

$\varepsilon \ll 1$ , in die Wasserwellengleichungen ein, dann erhält man zu führender Ordnung in  $\varepsilon$  die KdV-Gleichung

$$\partial_{\tau} A = \pm \left( \frac{1}{6} - \frac{b}{2} \right) \partial_{\xi}^3 A \pm \frac{3}{2} A \partial_{\xi} A$$

mit  $\tau = \varepsilon^3 t$ ,  $\xi = \varepsilon(x \pm t)$ ,  $b \neq \frac{1}{3}$ .

2.) Die Boussinesq-Gleichung

$$\partial_t^2 u = \partial_x^2 u - \partial_x^4 u + \partial_x^2 (u^2), \quad x, t, u(x, t) \in \mathbb{R}.$$

Hier liefert der Ansatz



$$\varepsilon^2 A(\varepsilon(x \pm t), \varepsilon^3 t)$$

die KdV-Gleichung

$$\partial_t A = \mp \frac{1}{2} \partial_x^3 A \mp \frac{1}{2} \partial_x (A^2).$$

Zur mathematischen Rechtfertigung der Gültigkeit der KdV-Approximation haben wir gezeigt, dass der relative Fehler zwischen exakter Lösung und Approximation auf der charakteristischen Zeitskala der Approximationsgleichung (d.h.  $t = O(\varepsilon^{-3})$ ) klein ist (d.h. von  $O(\varepsilon^\beta)$ ,  $\beta > 0$ ).

Beweismethode: Einführung einer Energie, die äquivalent zum Quadrat einer Sobolevnorm ist, Herleitung einer Differentialgleichung für die Energie und Anwendung der Grönwall'schen Ungleichung.

Konsequenz der Rechtfertigung: Dynamik der Approximationsgleichung (hier z.B. Solitärwellendynamik) ist auch im Original-System beobachtbar.

Allgemeine Struktur dispersiver Systeme, für die die KdV-Gleichung als Approximation herleitbar ist:

Betrachte eine Gleichung zweiter Ordnung im Fourierraum der Form

$$\partial_t^2 \hat{u}(k,t) = -\omega^2(k) \hat{u}(k,t) - \tilde{\gamma}(k) \hat{u}^{*2}(k,t), \quad \hat{u}^{*2} \text{ (Faltung)} \quad \frac{1}{\omega}(-k) = -\frac{1}{\omega}(k)$$

$$k \in \mathbb{R}, \quad \omega(-k) = -\omega(k), \quad \omega(0) = 0, \quad \left[ \lim_{|k| \rightarrow \infty} \left| \frac{\omega^2(k)}{\tilde{\gamma}(k)} \right| = C > 0 \right], \quad \frac{\tilde{\gamma}(0)}{\omega(0)} = 0. \quad \text{nicht notwendig, Korrektur vom 05.04.16}$$

(Bei der Boussinesq-Gleichung ist  $\omega^2(k) = k^2 + k^4$ ,  $\tilde{\gamma}(k) = k^2$ .)

Einführen von  $\hat{\omega}(k) = \begin{pmatrix} \hat{u}(k) \\ \frac{1}{\omega(k)} \partial_t \hat{u}(k) \end{pmatrix}$  liefert ein System 1. Ordnung:

$$\partial_t \hat{\omega}(k,t) = \hat{M}(k) \hat{\omega}(k,t) + \hat{N}(\hat{\omega})(k,t)$$

mit

$$\hat{M}(k) = \begin{pmatrix} 0 & i\omega(k) \\ i\omega(k) & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{N}(\hat{\omega})(k,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\tilde{\gamma}(k)}{i\omega(k)} \hat{u}^{*2}(k,t) \end{pmatrix}.$$



Das System kann diagonalisiert werden mit Hilfe von  $\hat{U} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ,  
 $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , (z.B.  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \hat{U}^{-1}(k) = \hat{U}^*(k) = \hat{U}(k)$ ), d.h.

$$\hat{z} = \hat{U}^* \hat{u} \text{ erfüllt}$$

$$\partial_t \hat{z} = \hat{\Lambda} \hat{z} + \hat{U}^* \hat{N}(\hat{U} \hat{z})$$

mit

$$\hat{\Lambda}(k) = \text{diag}(i\omega(k), -i\omega(k)).$$

$$\text{Ansatz: } \hat{z}(k, t) = \varepsilon^2 \varepsilon^{-1} \hat{A}_+ \left( \frac{k}{\varepsilon}, \varepsilon^3 t \right) e^{ickt} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ + \varepsilon^2 \varepsilon^{-1} \hat{A}_- \left( \frac{k}{\varepsilon}, \varepsilon^3 t \right) e^{-ickt} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zur Illustration betrachte nur  $\hat{A}_+$ : Einsetzen vom  $\hat{A}_+$ -Anteil liefert:

$$i\varepsilon^2 c k \hat{A}_+ + \varepsilon^4 \partial_t \hat{A}_+ = i\omega(k) \hat{A}_+ - \varepsilon^2 \frac{\tilde{g}(k)}{\omega(k)} \hat{A}_+^{*2} + \mathcal{O}(\varepsilon^6) \\ = i\varepsilon^2 \partial_k \omega(0) k \hat{A}_+ - \varepsilon^4 \partial_k \frac{\tilde{g}}{\omega}(0) i k \hat{A}_+^{*2} \\ + i\varepsilon^4 \partial_k^3 \omega(0) k^3 \hat{A}_+ + \mathcal{O}(\varepsilon^6)$$

mit  $k = \varepsilon K$ .

$\varepsilon^2$ -Balance:  $c = \partial_k \omega(0)$  Gruppengeschwindigkeit,

$\varepsilon^4$ -Balance: KdV-Gleichung im Fourierraum.

Analog für  $\hat{A}_-$ .

Dasselbe funktioniert auch für Systeme 1. Ordnung der Form

nach Diagonalisierung des Linearanteils

[Ergänzung]  
vom  
05.04.16]

$$\partial_t \hat{z} = \hat{\Lambda}(k) \hat{z} + \langle \hat{z}, \hat{B} \hat{z} \rangle + \text{kubische Terme, Terme 4. Ordnung, etc.}$$

mit  $\hat{B}(0) = 0$ ,  $\hat{B}(-k) = -\hat{B}(k)$ , sofern alle Koeffizienten der herauskommenden KdV-Gleichung  $\neq 0$  sind.