Für den Fehler $\varepsilon^\beta R = u - \varepsilon\Psi$ ergibt sich die Gl.

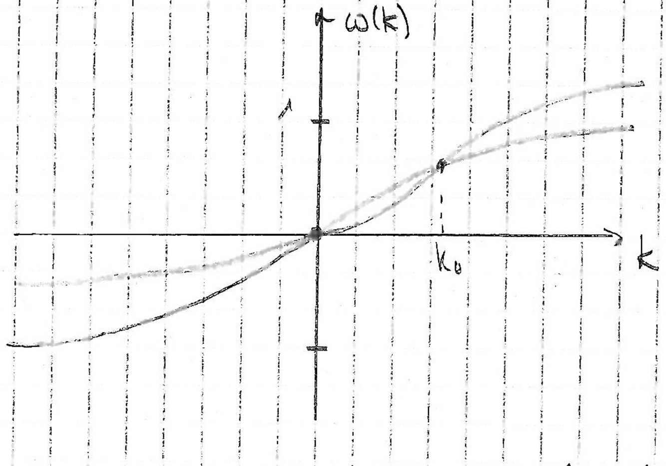
$$\partial_t^2 R = \partial_x^2 R + \partial_x^2 \partial_t^2 R + 2\varepsilon \partial_x^2 (\Psi R) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

bzw. als System 1. Ordnung im Fourierraum

$$\partial_t \hat{R}_j(k,t) = i\omega_j(k)\hat{R}_j(k,t) + \varepsilon \rho_j(k) \int_{\mathbb{R}} \hat{\Psi}(k-m,t)\hat{R}_j(m,t)\,dm + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

$j=1,2$, wobei $\omega_j(0) = \rho_j(0) = 0$ ist, $\omega_j'(0) \neq 0$, $\rho_j'(0) \neq 0$ und $\varepsilon\hat{\Psi}$ um $\pm k_0$ konzentriert ist.

Wenn wir für dieses System die zugehörige Normalform- transformation durchführen möchten, haben wir das Problem, dass die Nichtresonanzbed. ~~für $k=0$ und $k=\pm k_0$~~ nicht erfüllt ist. Denn betrachten wir die Kurven $k \mapsto \pm\omega(k)$ mit $\omega(k) = \mathrm{sgn}(k)\sqrt{\frac{k^2}{1+k^2}}$ und $k \mapsto \omega(k_0) \pm \omega(k-k_0)$, so ergeben sich Schnittpunkte bei $k=0$ und $k=k_0$ 9.5.16



Aus Symmetriegründen ist daher auch $k=-k_0$ problematisch. Diese drei Fouriermoden nennt man dann auch Resonanzen.

Definiert man die NFT in analoger Weise wie bei der nichtlin. Wellengleichung, so bekommt man Nennernullstellen bei $k \in \{0, \pm k_0\}$.

Da die quadrat. Nichtlinearität ebenfalls bei $k=0$ verschwindet und zwar so, dass die Singularität im Bruch, der bei der Definition der NFT entsteht, hebbar ist,* macht diese Resonanz kein Problem. Man nennt sie auch trivial.

*wegen $\omega_j(k)-\omega_j(-k_0)-\omega_j(k+k_0) = \mathcal{O}(|k|)$ für $|k|\to 0$
und $\rho_j(k) = \mathcal{O}(|k|)$ für $|k|\to 0$.

Die beiden anderen Resonanzen $k=\pm k_0$ sind dagegen nicht trivial, da der Zähler des Bruches dort nicht verschwindet, da $\rho(\pm k_0) \neq 0$ ist.

Da aber die Nichtlinearität bei $k=0$ verschwindet, kann man erwarten, dass die Fouriermoden des Fehlers R in der Nähe von $k=0$ langsamer wachsen als weiter weg von 0.

Betrachten wir dazu die Fehlergleichung für die Moden 0 und k_0:

$$\partial_t \hat{R}_j(k_0,t) = i\omega_j(k_0)\hat{R}_j(k_0,t) + \varepsilon \rho_j(k_0)\hat{\psi}(k_0,t)\hat{R}_j(0,t) + \text{h.o.T.}$$

$$\partial_t \hat{R}_j(0,t) = i\omega_j(0)\hat{R}_j(0,t) + \varepsilon \rho_j(0)\hat{\psi}(-k_0,t)\hat{R}_j(k_0,t) + \text{h.o.T.}$$

Skalieren wir den Fehler nahe $k=0$ mit $\varepsilon^{\beta+1}$ statt mit ε^{β} (ersetze $\hat{R}_j(0)$ durch $\varepsilon\hat{R}_j(0)$), dann erhalten wir

$$\partial_t \hat{R}_j(k_0,t) = i\omega_j(k_0)\hat{R}_j(k_0,t) + \varepsilon^2 \rho_j(k_0)\hat{\psi}(k_0,t)\hat{R}_j(0,t) + \text{h.o.T.}$$

$$\partial_t \hat{R}_j(0,t) = i\omega_j(0)\hat{R}_j(0,t) + \rho_j(0)\hat{\psi}(-k_0,t)\hat{R}_j(k_0,t) + \text{h.o.T.}$$

Folglich ist der quadratische Term in der Gleichung für $\hat{R}_j(k_0)$ von Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$, so dass in der Nähe der nichttrivialen Resonanz k_0 (und entsprechend auch bei $-k_0$) gar keine NFT durchgeführt werden muss.

Man schreibt daher den Fehler in der Form

$$\hat{u} = \varepsilon \hat{\Psi} + \varepsilon^{\beta} \hat{\vartheta} \hat{R}$$

mit
$$\hat{\vartheta}(k) = \begin{cases} \varepsilon + \frac{|k|}{\delta}(1-\varepsilon), & |k| \leq \delta \\ 1, & |k| > \delta \end{cases}$$

für hinreichend kleines, aber ε-unabh. $\delta > 0$.

Dann ist die neue Fehlergleichung von der Form

$$\partial_t \hat{R}_j = i\omega_j \hat{R}_j + \varepsilon \hat{\vartheta}^{-1} B(\Psi, \hat{\vartheta}\hat{R}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

mit

$$\varepsilon \hat{\vartheta}^{-1} B(\hat{\Psi}, \hat{\vartheta}\hat{R})(k) = \varepsilon \hat{\vartheta}^{-1}(k) g_j(k) + \int dm\, \hat{\Psi}(k-m,t) \hat{R}_j(m,t) \hat{\vartheta}(m)$$

Die Normalformtrafo ist dann von der Form

$$\tilde{R} = R + \varepsilon N(\Psi, R)$$

mit

$$(\hat{N}(\Psi,\hat{R}))_{j^1} = \sum_{j^2,j^3} \int \hat{n}^{j^1}_{j^2,j^3}(k, \cancel{k-m}, m) \hat{\Psi}_{j^2}(k-m) \hat{R}_{j^3}(m)\, dm$$

und

$$\hat{n}^{j^1}_{j^2 j^3}(k) = \frac{\hat{b}^{j^1}_{j^2 j^3}(k, k_0, k-k_0)}{i(\omega_{j^1}(k) - \omega_{j^2}(k_0) - \omega_{j^3}(k-k_0))} \chi(k, k_0, k-k_0) \frac{\hat{\vartheta}(k-k_0)}{\hat{\vartheta}(k)},$$

$$\widehat{\vartheta^{-1} B(\Psi, \vartheta R)}_{j^1}(k) = \sum_{j^2, j^3} \int \hat{b}^{j^1}_{j^2 j^3}(k, k-m, m) \frac{\hat{\vartheta}(m)}{\hat{\vartheta}(k)} \hat{\Psi}_{j^2}(k-m) \hat{R}_{j^3}(m)\, dm,$$

$$\chi(k, k-m, m) = \begin{cases} 0, & |m| \leq \varepsilon/2 \text{ oder } |k-m \pm k_0| \geq 2\delta \\ 2, & |m| > \varepsilon \text{ und } |k-m \pm k_0| < \delta \end{cases}$$

und dazwischen lipschitzstetig fortgesetzt.

Um die nichttrivialen Resonanzen $\pm k_0$ ist also abgeschnitten worden, so dass die NFT wohldef. ist.

Nach der NFT haben wir die Gleichung

$$\partial_t \hat{R}_j = i\omega_j \tilde{R}_j + \underbrace{\varepsilon^2 \sum_{l=\pm1} \underbrace{N(\hat\varphi_l, \vartheta^{-1} B(\hat\varphi_l, \vartheta \hat{R}))_j}_{\mathcal{O}(\varepsilon^{-1}) \text{ in der Nähe von } k=0}}_{(\cdot)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

mit $\hat\varphi_l = \hat\varphi \big|_{[lk_0-\delta,\, lk_0+\delta]}$.

Daher muss der Term $(\cdot)$ mit einer zweiten NFT der Form

$$\check{R} = \tilde{R} + \varepsilon \sum_{l=\pm1} T(\varphi_l, \varphi_l, R)$$

eliminiert werden. Die Def. dieser NFT geht analog zum bisherigen Konstruktionsverfahren, wobei hier keine Resonanzen auftreten. Danach haben wir

$$\partial_t \check{R}_j = i\omega_j \check{R}_j + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

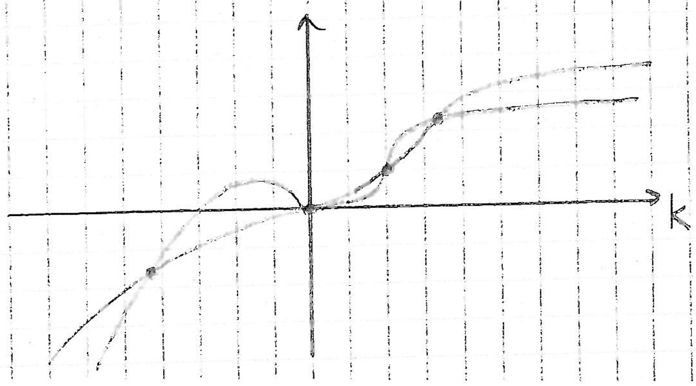
und wir erhalten mit Gronwall die Beschränktheit von $\check{R}$ und damit auch von R für $t = \mathcal{O}(\varepsilon^{-2})$.

Nun betrachten wir den Fall $\underline{\mu \neq 0}$.

Hier ist die Dispersionsrelation

$$\omega(k) = \operatorname{sgn}(k) \sqrt{\frac{k^2 + \mu k^6}{1+k^2}}.$$

Die Herleitung der NLS-Approx., die Aufstellung der Fehlergl. und der Ansatz für die NFT gehen analog zum Fall $\mu = 0$. Allerdings kommen zu den bisherigen Resonanzen weitere nichttriviale Resonanzen $\pm k_2, \pm k_3$ vor.



In der Nähe von diesen Resonanzen muss in der NFT abgeschnitten werden durch Anpassung von χ. Ein Skalierungsargument kann hier nicht genutzt werden. Daher muss die Dynamik in der Nähe dieser Resonanzen gesondert untersucht werden.

Aus 10.5.16

$$\omega_1(k) - \omega_1(k_0) - \omega_1(k-k_0) = 0,$$
$$\omega_1(k) = \omega(k) = \operatorname{sgn}(k)\sqrt{\frac{k^2+\mu k^6}{1+k^2}},$$
$$\omega_2(k) = -\omega_1(k) = \omega_1(-k),$$

folgt auch

$$+\omega_2(-k) - \omega_1(k_0) - \omega_1(k-k_0) = 0,$$

so dass wir oBdA annehmen können, dass evtl. - gilt

$$k_0 + k_2 + k_3 = 0 \quad \text{und} \quad \omega(k_0) + \omega(k_2) + \omega(k_3) = 0.$$

Sei $k_1 := k_0$.

Ist
$$R = \varepsilon \sum_{j=1}^{3} A_j(\varepsilon t) e^{i(k_j x + \omega_j t)} + c.c. + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

dann folgt durch Balancieren der Koeffizienten von $\varepsilon^2 e^{i(k_j x + \omega_j t)}$ in der Fehlergleichung

$$\partial_T A_1 = i\gamma_1 \overline{A_2 A_3}$$
$$\partial_T A_2 = i\gamma_2 \overline{A_1 A_3}$$
$$\partial_T A_3 = i\gamma_3 \overline{A_1 A_2}$$

mit $\gamma_i \in \mathbb{R}$. Dieses System besitzt drei invariante Unterräume aus Fixpunkten, nämlich

$$M_1 = \{A_2 = A_3 = 0\}$$
$$M_2 = \{A_1 = A_3 = 0\}$$
$$M_3 = \{A_1 = A_2 = 0\}$$