

In der Nähe von diesen Resonanzen muss in der NFT abgeschnitten werden durch Anpassung von χ . Ein Skalierungsargument kann hier nicht genutzt werden.

Daher muss die Dynamik in der Nähe dieser Resonanzen gesondert untersucht werden.

Aus

10.5.16

$$\omega_{\text{res}}(k) - \omega_1(k_0) - \omega_{\text{res}}(k-k_0) = 0,$$

$$\omega_1(k) = \omega(k) = \text{sog}(k) \sqrt{\frac{k^2 + \mu k^6}{1+k^2}},$$

$$\omega_2(k) = -\omega_1(k) = \omega_1(-k),$$

folgt auch

$$+\omega_2(-k) - \omega_1(k_0) - \omega_1(k-k_0) \stackrel{\text{evtl.}}{=} 0,$$

so dass wir oBdA annehmen können, dass gilt

$$k_0 + k_2 + k_3 = 0 \quad \text{und} \quad \omega(k_0) + \omega(k_2) + \omega(k_3) = 0.$$

Sei $k_1 = k_0$.

$$\text{Ist} \quad R = \varepsilon \sum_{j=1}^3 A_j(\varepsilon t) e^{i(k_j x + \omega_j t)} + \text{c.c.} + O(\varepsilon^2),$$

dann folgt durch Balancieren der Koeffizienten von $\varepsilon^2 e^{i(k_j x + \omega_j t)}$ in der Fehlgleichung

$$\partial_t A_1 = i \gamma_1 \overline{A_2 A_3}$$

$$\partial_t A_2 = i \gamma_2 \overline{A_1 A_3}$$

$$\partial_t A_3 = i \gamma_3 \overline{A_1 A_2}$$

mit $\gamma_j \in \mathbb{R}$. Dieses System besitzt drei invariante Unterräume aus Fixpunkten, nämlich

$$M_1 = \{A_2 = A_3 = 0\}$$

$$M_2 = \{A_1 = A_3 = 0\}$$

$$M_3 = \{A_1 = A_2 = 0\}.$$

Man kann direkt nachrechnen, dass, falls γ_2 und γ_3 unterschiedliche Vorzeichen haben, g_2 und $g_3 \in \mathbb{R}$ mit $\text{sign}(g_2) = \text{sign}(g_3)$ existieren, so dass

$$E = g_2 |A_2|^2 + g_3 |A_3|^2$$

eine Energie def., mit der die Stabilität von M_1 nachgewiesen werden kann.

Haben γ_2 und γ_3 gleiches Vorzeichen, dann ist M_1 instabil. Analoges gilt für M_2 und M_3 .

Führt man bei der Fehlerg. für die Boussinesq-Gl. mit $\mu > 0$ die NFT wie im Fall $\mu = 0$ durch, aber schneidet um jedes zusätzliche Paar $(\pm k_2, \pm k_3)$ nichttrivialer Resonanzen ab, dann erhält man

$$\partial_t \check{R} = \begin{pmatrix} i\omega & 0 \\ 0 & -i\omega \end{pmatrix} \check{R} + 2\varepsilon \tilde{B}(\Psi, R) + O(\varepsilon^2),$$

wobei $\tilde{B}$ die Einschränkung von B auf Umgebungen von $\pm k_2, \pm k_3$ ist. kompakt getragen im $\mathbb{R}^2 \rightarrow$ bei ∂_t diff.

Betrachten wir den Fall, dass es nur ein Paar $(\pm k_2, \pm k_3)$ gibt (für mehrere Paare geht alles analog). Wir def.

eine Energie der Form

$$E_S = \sum_{\ell, j=0}^S E_{\ell, j}(\check{R}, \check{R}) + \varepsilon Q_{\ell, j}(\Psi, \check{R}, \check{R})$$

mit
$$E_{\ell, j}(\check{R}, \check{R}) = \int \sum_{j=\pm 1} \sigma_j(k) (ik)^\ell \hat{\check{R}}_j(k) \overline{(ik)^\ell \hat{\check{R}}_j(k)} dk,$$

$$Q_{\ell, j}(\Psi, \check{R}, \check{R}) = \iint \sum_{j, m, n=\pm 1} \hat{q}_{jmn}^{\ell}(k, k-p, p) (ik)^\ell \hat{\check{R}}_j(k) \overline{(ik)^\ell \hat{\Psi}_m(k-p) \hat{\check{R}}_n(p)} dp dk$$

$$+ \iint \sum_{j, m, n=\pm 1} \hat{q}_{jmn}^{\ell}(k, k-p, p) (ik)^\ell \hat{\check{R}}_j(k) \overline{(ik)^\ell \hat{\Psi}_m(k-p) \hat{\check{R}}_n(p)} dp dk$$

Die Koeffizienten q_{mn} wählt man ähnlich zur Konstruktion der NFT so, dass in der Evolutionsgl. für E_s alle Terme außerhalb der Umgebungen von $\pm k_2, \pm k_3$ eliminiert werden.

= Testen der NFT mit Fkt R selber

stattdessen wäre auch zweif. NFT möglich.

Die Koeffizienten σ_j können im Fall, dass M_1, M_2, M_3 stabil sind, so gewählt werden, dass E_s (wie notwendig) positiv definit ist. In dem Fall kann man dann für die so konstruierte Energie eine Differentialung. herleiten, auf die man Gronwall anwenden kann, was den Approx. Satz liefert.

Im Falle von instabilen Unterräumen ist noch nicht vollständig geklärt, ob die NLS-Approx. für $t = O(\varepsilon^{-2})$ gültig bleibt.

Im Falle analytischer Lösungen der NLS-Gl. kann die Gültigkeit mithilfe von Zeitabh. Normen in analytischen Räumen nachgewiesen werden. ^{Streifen, in dem Fkt analytisch sind, wird immer dünner} Für nicht analytische Lösungen gibt es zumindest Gegenbeispiele, bei denen die Gültigkeit nicht erhalten bleibt. ^{→ nat. Sit? bisher sind Gegenbsp. ziemlich künstlich}