Als weiteres typisches Beispiel für die NLS-Approximation betrachten wir die nichtlineare Wellengleichung

$$\partial_t^2 u = \partial_x^2 u - u + N(u) \qquad (1)$$

mit $N(u) = \partial_x^2 (u^2)$ für $x, t, u(x,t) \in \mathbb{R}$. Wir machen den Ansatz

$$u = \varepsilon \Psi_{NLS} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

mit

$$\varepsilon \Psi_{NLS}(x,t) = \varepsilon A(\varepsilon(x - c_g t), \varepsilon^2 t)\, e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} + c.c.$$

Für geeignete Wahl von $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ löst A zu führender Ordnung in ε die NLS-Gleichung

$$\partial_T A = i \nu_1 \partial_X^2 A + i \nu_2 A |A|^2 , \qquad (2)$$

wobei $X = \varepsilon(x - c_g t)$, $T = \varepsilon^2 t$, $\nu_j = \nu_j(k_0) \in \mathbb{R}$. Außerdem ist $k_0 > 0$, $\omega_0 = \omega(k_0)$, wobei

$$\omega(k) = \operatorname{sign}(k) \sqrt{1 + k^2}, \quad c_g = \partial_k \omega \big|_{k = k_0} .$$

Theorem 1.2.5:

Sei $s_A \geq 6$. Für alle $k_0 > 0$ und alle $C_1, T_0 > 0$ existieren $C_2 > 0$, $\varepsilon_0 > 0$, so dass für alle Lösungen $A \in C([0, T_0], H^{s_A}(\mathbb{R}, \mathbb{C}))$ der NLS-Gleichung (2) mit

$$\sup_{T \in [0, T_0]} \| A(\cdot, T) \|_{H^{s_A}(\mathbb{R}, \mathbb{C})} \leq C_1$$

Folgendes gilt: Für alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ existieren Lösungen

$$u \in C([0, T_0/\varepsilon^2], H^{s_A}(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$$

der quasilinearen Wellengleichung (1) mit

$$\sup_{t \in [0, T_0/\varepsilon^2]} \| u(\cdot, t) - \varepsilon \Psi_{NLS}(\cdot, t) \|_{H^{s_A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})} \leq C_2 \, \varepsilon^{3/2} . \qquad \boxtimes$$

Zur Herleitung der NLS-Approximation:

Wir schreiben die Gleichung (1) als System 1. Ordnung der Form

$$\partial_t u = \sqrt{1-\partial_x^2}\, H v,$$
$$\partial_t v = \sqrt{1-\partial_x^2}\, H u - \partial_x^2 (1-\partial_x^2)^{-1/2} H(u^2),$$

wobei H die Hilberttransformation ist. Im Fourierraum haben wir

$$\partial_t \hat{u}(k,t) = -i\omega(k)\, \hat{v}(k,t),$$

$$\partial_t \hat{v}(k,t) = -i\omega(k)\, \hat{u}(k,t) - i\rho(k)\, (\hat{u} * \hat{u})(k,t)$$

mit

$$\omega(k) = \operatorname{sign}(k) \sqrt{1+k^2},$$
$$\rho(k) = \operatorname{sign}(k) \frac{k^2}{\sqrt{1+k^2}}.$$

Diagonalisierung mittels

$$\begin{pmatrix} \hat{u}_{-1} \\ \hat{u}_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{pmatrix}$$

liefert

$$\partial_t \hat{u}_{-1}(k,t) = -i\omega(k)\, \hat{u}_{-1}(k,t) - \frac{1}{2} i \rho(k) (\hat{u}_{-1} + \hat{u}_1)^{*2} (k,t),$$
$$\partial_t \hat{u}_1(k,t) = i\omega(k)\, \hat{u}_1(k,t) + \frac{1}{2} i \rho(k) (\hat{u}_{-1} + \hat{u}_1)^{*2} (k,t).$$

Da wie im Fall $N(u) = u^2$ die Nichtresonanzbedingungen erfüllt sind, die für die Herleitung der NLS-Approximation notwendig sind, kann analog zum Fall $N(u) = u^2$ vorgegangen werden. Man erhält die Approximationsfunktion

$$\varepsilon \Psi = \varepsilon \Psi_{+1} + \varepsilon \Psi_{-1} + \varepsilon^2 \Psi_q$$

mit

$$\varepsilon \Psi_{\pm 1} = \varepsilon \psi_{\pm 1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \varepsilon A_{\pm 1}(\varepsilon(x - c_g t), \varepsilon^2 t)\, e^{\pm(k_0 x - \omega_0 t)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$A_{-1} = \overline{A_1},$$

$$\sup_{t\in[0,T_0/\varepsilon^2]} \| \varepsilon \Psi - \varepsilon \Psi_{NLS} \|_{H^{s_A}} \leq C_\Psi \varepsilon^{3/2}, \qquad (3)$$

$$\sup_{t\in[0,T_0/\varepsilon^2]} \left(\| \hat{\psi}_{\pm 1} \|_{L^1_{(s+1)}(\mathbb{R},\mathbb{C})} + \| \hat{\psi}_q \|_{L^1_{(s+1)}(\mathbb{R},\mathbb{C})} \right) \leq C_\Psi \qquad (4)$$

für alle $s \geq 0$.

$\operatorname{supp} \hat{\psi}_1$, $\operatorname{supp} \hat{\psi}_{-1}$, $\operatorname{supp} \hat{\psi}_q$ sind jeweils kompakt für alle $0 < \varepsilon \ll 1$,

$$\sup_{t\in[0,T_0/\varepsilon^2]} \| Res_u(\varepsilon \Psi) \|_{H^s} \leq C_{Res} \varepsilon^{9/2} \quad \text{für alle } s \geq 0, \qquad (5)$$

$$\| \partial_t \psi_{\pm 1} + i\omega \psi_{\pm 1} \|_{L^1(s)} \leq C_4 \varepsilon^2 \quad \text{für alle } s \geq 0. \qquad (6)$$

Beweis der Fehlerabschätzungen:

Schreibe $u_{\pm 1}$ als Approximation plus Fehler:

$$\begin{pmatrix} \hat{u}_{-1} \\ \hat{u}_1 \end{pmatrix} = \varepsilon \Psi + \varepsilon^{5/2} \begin{pmatrix} \hat{R}_{-1} \\ \hat{R}_1 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \partial_t \hat{R}_{-1}(k,t) = -i\omega(k) \hat{R}_{-1}(k,t) - \varepsilon i g(k) \left(\hat{\psi} * (\hat{R}_{-1} + \hat{R}_1) \right)(k,t)$$
$$- \frac{1}{2} \varepsilon^{5/2} i g(k) \left(\hat{R}_{-1} + \hat{R}_1 \right)^{*2}(k,t) + \varepsilon^{-5/2} Res_{u_{-1}}(\varepsilon \Psi),$$

$$\partial_t \hat{R}_1(k,t) = i\omega(k) \hat{R}_1(k,t) + \varepsilon i g(k) \left(\hat{\psi} * (\hat{R}_{-1} + \hat{R}_1) \right)(k,t)$$
$$+ \frac{1}{2} \varepsilon^{5/2} i g(k) \left(\hat{R}_{-1} + \hat{R}_1 \right)^{*2}(k,t) + \varepsilon^{-5/2} Res_{u_1}(\varepsilon \Psi)(k,t)$$

mit $\psi = \psi_{-1} + \psi_1 + \varepsilon \psi_{q_{-1}} + \varepsilon \psi_{q_1}$, wobei $\Psi_q = \begin{pmatrix} \psi_{q_{-1}} \\ \psi_{q_1} \end{pmatrix}$.

Der problematische Term ist

$$\pm \varepsilon B(\psi, R) \quad \text{mit} \quad \widehat{B(\hat{\psi}, \hat{R})}(k,t) = i g(k) \left(\hat{\psi} * (\hat{R}_{-1} + \hat{R}_1) \right)(k,t).$$

Wegen $i g(k) \approx ik$ für $|k| \gg 1$ verliert dieser Term eine Ableitung an

Regularität, also $R \mapsto B(\psi, R)$ bildet H^{m+1} auf H^m ab. Würde man diesen Term mit Hilfe einer NFT der Form $\tilde{R} = R + \varepsilon N(\psi, R)$ mit geeigneter bilinearer Abbildung N eliminieren, dann würde $N(\psi, R)$ auch eine Ableitung verlieren und in der Evolutionsgleichung für $\tilde{R}$:

$$\partial_t \tilde{R} = \begin{pmatrix} -i\omega & 0 \\ 0 & i\omega \end{pmatrix} \tilde{R} + \varepsilon^2 g(\Psi, \tilde{R}) + \varepsilon^{-5/2} \operatorname{Res}(\varepsilon \Psi)$$

würde der Term $g(\Psi, \tilde{R})$ sogar zwei Ableitungen verlieren, so dass eine direkte Anwendung von Gronwall oder direkte Energieabschätzungen nicht funktionieren würden, da die Halbgruppe des Linearteils nicht glättend ist.

Daher führen wir die NFT nicht explizit aus, sondern nutzen sie nur zur Definition der folgenden Energie:

$$\mathcal{E}_s = \sum_{\ell=0}^{s} E_\ell ,$$

$$E_\ell = \sum_{j_1 \in \{\pm 1\}} \Big(\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (\partial_x^\ell R_{j_1})^2 \, dx + \varepsilon \sum_{j_2 \in \{\pm 1\}} \int_{\mathbb{R}} \partial_x^\ell R_{j_1} \, \partial_x^\ell N_{j_1 j_2}(\psi, R_{j_2}) \, dx \Big)$$

mit

$$\hat{N}_{j_1 j_2}(\psi, R_{j_2})(k) = \int_{\mathbb{R}} \hat{n}_{j_1 j_2}(k, k-m, m) \, \hat{\psi}(k-m) \, \hat{R}_{j_2}(m) \, dm ,$$

$$\hat{n}_{j_1 j_2}(k, k-m, m) = \frac{-j_1 \, g(k) \, \chi(k-m)}{-j_1 \omega(k) - \omega(k-m) + j_2 \omega(m)} .$$

χ ist die charakteristische Funktion auf $\operatorname{supp} \hat{\psi}$, $s = s_A \geq 6$.

<u>Lemma 1.2.6:</u>

Die Operatoren $N_{j_1 j_2}$ haben die folgenden Eigenschaften:

a.) Sei $h \in L^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Dann definiert $f \mapsto N_{jj}(h,f)$ stetige lineare Abbildungen von $H^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ nach $L^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ und $f \mapsto N_{j-j}(h,f)$ von $L^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ nach $L^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Insbesondere gilt für alle $f \in H^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$:

$$N_{jj}(h,f) = -j\,\partial_x\left(G_{jj}hf\right) + Q_{jj}(h,f),$$

$$N_{j-j}(h,f) = G_{j-j}hf + Q_{j-j}(h,f)$$

mit

$$\widehat{G_{jj}h}(k) = \frac{\chi(k)}{-i(\omega(k)+jk)}\hat{h}(k), \quad \widehat{G_{j-j}}(k) = \tfrac{1}{2}\chi(k)\hat{h}(k),$$

$$\|Q_{j\pm j}(h,f)\|_{H^1} = \mathcal{O}\left(\|h\|_{L^2}\|f\|_{L^2}\right).$$

b.) $\forall f \in H^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$:

$$-j_1 i\omega N_{j_1j_2}(\varphi,f) - N_{j_1j_2}(i\omega\varphi,f) + j_2 N_{j_1j_2}(\varphi,i\omega f) = -j_1 i\varrho(\varphi f).$$

c.) $\forall f,g,h \in H^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$:

$$\int_{\mathbb{R}} f N_{j_1j_2}(h,g)\,dx = -\frac{j_1}{j_2}\int_{\mathbb{R}} N_{j_2j_1}(h,f)g\,dx + \int_{\mathbb{R}} S_{j_2j_1}(\partial_x h,f)g\,dx,$$

wobei

$$\hat{S}_{j_2j_1}(\partial_x h,f)(k) = \int_{\mathbb{R}} \hat{s}_{j_2j_1}(k,k-m,m)\,\widehat{\partial_x h}(k-m)\hat{f}(m)\,dm,$$

$$\hat{s}_{j_2j_1}(k,k-m,m) = \frac{-j_1(\varrho(k)-\varrho(m))\chi(k-m)}{(k-m)i\left(-j_2\omega(k)-\omega(k-m)+j_1\omega(m)\right)}.$$

Insbesondere haben wir

$$S_{jj}(\partial_x h,f) = -j\,G_{jj}\partial_x h f + \widetilde{Q}_{jj}(\partial_x h,f)$$

mit

$$\|\widetilde{Q}_{jj}(\partial_x h,f)\|_{H^2} = \mathcal{O}\left(\|h\|_{L^2}\|f\|_{L^2}\right).$$