MGl. Vorlesung 13 Di, 24.05.2016

$$\partial_t^2 u = \partial_x^2 u - u + \partial_x^2 (u^2)$$

$$\int R\tilde{R} = \int (R + \varepsilon N(\psi, R))\, R \qquad R = \begin{pmatrix} R_{-1} \\ R_1 \end{pmatrix}$$

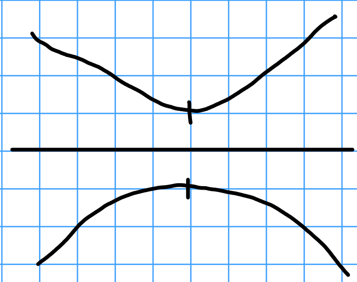
Wdh.

Beweis Lemma 1.2.6:

a.) Da $\operatorname{supp} \hat{\psi}$ nach Konstruktion kompakt ist, ex. ein $k_1 > 0$ mit $\operatorname{supp} \chi = \operatorname{supp} \chi_{\operatorname{supp} \hat{\psi}} \subseteq [-k_1, k_1]$.

$$\Rightarrow \inf_{\substack{k \in \mathbb{R} \\ p \in [-k_1, k_1] \\ j_1, j_2 \in \{\pm 1\}}} |-j_1 \omega(k) - \omega(p) + j_2 \omega(k-p)| \geq C > 0$$

für eine Konstante $C = C(k_1)$ mit $C(k_1) \to 0$ für $k_1 \to \infty$.



$$\Rightarrow \forall k, m \in \mathbb{R}: \quad |\hat{n}_{j_1 j_2}(k, k-m, m)| < \infty.$$

Es gilt:

$$\omega(k) = \operatorname{sign}(k) \sqrt{1 + k^2} = k + \mathcal{O}(|k|^{-1}) \quad \text{für } |k| \to \infty. \qquad (7)$$

$$\omega'(k) = 1 + \mathcal{O}(k^{-2}) \quad \text{für } |k| \to \infty, \qquad (8)$$

$$\rho(k) = \operatorname{sign}(k) \frac{k^2}{\sqrt{1 + k^2}} = k + \mathcal{O}(|k|^{-1}) \quad \text{für } |k| \to \infty. \qquad (9)$$

Daher folgt:

$$\hat{n}_{jj}(k, k-m, m) = \frac{j\, \rho(k)\, \chi(k-m)}{\omega(k-m) + j(\omega(k) - \omega(m))}$$

Mittelwertsatz:

$$= \frac{j\, \rho(k)\, \chi(k-m)}{\omega(k-m) + j(k-m)\, \omega'(k - \vartheta(k,m)(k-m))} \quad \text{mit } \vartheta(k,m) \in [0,1]$$

(8), (9), $\operatorname{supp} \chi$ kompakt:

$$= \frac{j\,(k + \mathcal{O}(|k|^{-1}))\, \chi(k-m)}{\omega(k-m) + j(k-m)(1 + \mathcal{O}(k^{-2}))} \quad \text{für } |k| \to \infty$$

$$= \left(\frac{jk}{\omega(k-m)+j(k-m)} + \mathcal{O}(|k|^{-1}) \right) \chi(k-m) \qquad \text{für } |k| \to \infty .$$

Analog erhalten wir:

$$\hat{n}_{jj}(k, k-m, m) = \frac{j\,\varrho(k)\,\chi(k-m)}{j\big(\omega(k) + \omega(k-(k-m)) + \omega(k-m)\big)}$$

supp χ kompakt, (7):

$$= \frac{\varrho(k)\,\chi(k-m)}{2\omega(k)\,\big(1+\mathcal{O}(|k|^{-1})\big)}$$

(9):

$$= \left(\frac{1}{2} + \mathcal{O}(|k|^{-1}) \right) \chi(k-m) \qquad \text{für } |k| \to \infty .$$

Wegen

$$\hat{n}_{j_1 j_2}(-k, -(k-m), -m) = \hat{n}_{j_1 j_2}(k, k-m, m) \in \mathbb{R}$$

und da ψ reellwertig ist, haben wir alle Aussagen von a.) gezeigt.

b.) folgt nach Konstruktion von $N_{j_1 j_2}$ (N stammt von der NFT).

Heuristik: $\int f\, T_1(T_2 h\, T_3 g) \to \int g\, T_3(T_2 h\, T_1 f)$

c.) $\forall f, g, h \in H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{f}(k)}\, \hat{N}_{j_1 j_2}(h, g)(k)\, dk$$

$$= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{f}(k)}\, \frac{-j_1\, \varrho(k)\, \chi(k-m)}{-j_1 \omega(k) - \omega(k-m) + j_2 \omega(m)}\, \hat{h}(k-m)\, \hat{g}(m)\, dm\, dk$$

[Variablenumbenennung]

$$= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{g}(-\underset{k}{\cancel{m}})}\, \frac{+j_1\, \varrho(\overset{m}{\cancel{k}})\, \chi(k-m)}{-j_2\, \omega(\underset{k}{\cancel{m}}) - \omega(k-m) - j_1\, \omega(\underset{m}{\cancel{k}})}\, \hat{h}(k-m)\, \hat{f}(-\underset{m}{\cancel{k}})\, d\underset{m}{\cancel{k}}\, d\underset{k}{\cancel{m}}$$

$$= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{g}(k)}\, \frac{j_1\, \varrho(k)\, \chi(k-m)}{-j_2 \omega(k) - \omega(k-m) + j_1 \omega(m)}\, \hat{h}(k-m)\, \hat{f}(m)\, dm\, dk$$

$$+ \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(k) \frac{-j_1 (\rho(k) - \rho(m)) \chi(k-m)}{-j_2\, \omega(k) - \omega(k-m) + j_1 \omega(m)} \hat{h}(k-m) \hat{f}(m) \, dm \, dk$$

$$= -\frac{j_1}{j_2} \int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{g}(k)} \, \hat{N}_{j_2 j_1}(h,f)(k) \, dk + \int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{g}(k)} \, \hat{S}_{j_2 j_1}(\partial_x h, f)(k) \, dk$$

$$\overset{a.), b.)}{\Longrightarrow} \text{Rest von } c.). \qquad \square$$

Korollar 1.2.7:

Für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ ist $\sqrt{\mathcal{E}_s}$ äquivalent zu $\|R_1\|_{H^s} + \|R_{-1}\|_{H^s}$. ⋊

Lemma 1.2.8:

Sei $j \in \{\pm 1\}$, $a_j \in H^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und $f_j \in H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Dann gilt

- $$\int_{\mathbb{R}} a_j f_j \partial_x f_j \, dx = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \partial_x a_j \, f_j^2 \, dx,$$

- $$\sum_{j \in \{\pm 1\}} \int_{\mathbb{R}} a_j f_j \partial_x f_{-j} \, dx$$
$$= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (a_{-1} - a_1)(f_1 + f_{-1}) \partial_x (f_1 - f_{-1}) \, dx$$
$$+ \mathcal{O}\Big(\big(\|a_1\|_{H^2} + \|a_{-1}\|_{H^2}\big) \big(\|f_1\|_{L^2}^2 + \|f_{-1}\|_{L^2}^2 \big) \Big). \quad ⋊$$

Beweis:

1. Identität folgt durch partielle Integration.
2. Identität:

$$\sum_{j \in \{\pm 1\}} \int_{\mathbb{R}} a_j f_j \partial_x f_{-j} \, dx$$

$$\overset{p.I.}{=} \frac{1}{2} \sum_{j \in \{\pm 1\}} \Big(\int_{\mathbb{R}} a_j f_j \partial_x f_{-j} \, dx - \int_{\mathbb{R}} a_j \partial_x f_j \, f_{-j} \, dx - \int_{\mathbb{R}} \partial_x a_j \, f_j f_{-j} \, dx \Big)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{\mathbb{R}} (a_{-1}-a_1) f_{-1}\,\partial_x f_1 \,dx - \int_{\mathbb{R}} (a_{-1}-a_1) f_1 \,\partial_x f_{-1}\,dx\right]$$
$$+ \mathcal{O}\Big(\big(\|a_1\|_{H^2} + \|a_{-1}\|_{H^2}\big)\big(\|f_1\|_{L^2}^2 + \|f_{-1}\|_{L^2}^2\big)\Big)$$
$$= \frac{1}{2}\left[\int_{\mathbb{R}} (a_{-1}-a_1)(f_1+f_{-1})\,\partial_x f_1 \,dx - \int_{\mathbb{R}} (a_{-1}-a_1)(f_1+f_{-1})\,\partial_x f_{-1}\,dx\right]$$
$$+ \mathcal{O}\Big(\big(\|a_1\|_{H^2} + \|a_{-1}\|_{H^2}\big)\big(\|f_1\|_{L^2}^2 + \|f_{-1}\|_{L^2}^2\big)\Big)$$
$$= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} (a_{-1}-a_1)(f_1+f_{-1})\,\partial_x (f_1-f_{-1}) \,dx$$
$$+ \mathcal{O}\Big(\big(\|a_1\|_{H^2} + \|a_{-1}\|_{H^2}\big)\big(\|f_1\|_{L^2}^2 + \|f_{-1}\|_{L^2}^2\big)\Big). \qquad \square$$