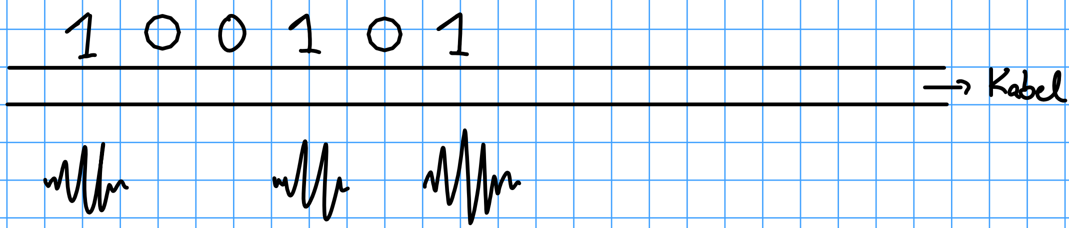
Modulationsgleichungen Vorlesung 15 Di, 31.05.2016

Anwendung der NLS-Approximation in der nichtlinearen Optik

Physikalischer Hintergrund;

Übertragung von Daten durch Glasfaserkabel. Die Daten sind dabei digital kodiert durch 0en und 1en.

Physikalische Realisierung der 1en durch Lichtpulse (elektromagnetisches Wellenpaket mit Grundwellenzahl k_0, Phasengeschwindigkeit $c_p(k_0)$ und Gruppengeschwindigkeit $c_g(k_0)$).



Die Wellenpakete sind Lösungen der Maxwellgleichungen. Würde man diese Lösungen numerisch simulieren, dann hätte man folgendes Problem:

Die typische Länge eines Lichtpulses ist $\sim 10^{-7}$m. Würde man die Lichtpulse in einem Kabel der Länge 10^5 m auflösen wollen, dann bräuchte man mindestens $\mathcal{O}(10^{12})$ Gitterpunkte, was eine zu hohe Komplexität ist.

Da es für die Datenübertragung genügt, die Einhüllenden zu kennen, kann man, indem man anstelle der Maxwellgleichungen die Lösungen der NLS-Approximation (sofern sie gültig ist) numerisch simuliert, die Komplexität reduzieren (auf $\mathcal{O}(10^8)$ Gitterpunkte) und damit die Effizienz der Simulation steigern.

Beschreibung der elektromagnetischen Wellen durch die Maxwell-Gleichungen:

(1) $\nabla \cdot E = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$, (2) $\nabla \times E = -\partial_t B$,

(3) $c^2 \nabla \times B = \partial_t E + \dfrac{j}{\varepsilon_0}$, (4) $\nabla \cdot B = 0$,

mit

E: elektrisches Feld, B: magnetisches Feld,

ρ: Ladungsdichte, j: Stromdichte,

ε_0: Dielektrizitätskonstante, μ_0: Permeabilität,

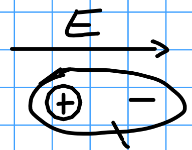
$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$: Lichtgeschwindigkeit.

ρ und j werden durch E und B beeinflusst. Wir haben Ladungserhaltung:

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot j = 0.$$

Modellierung des Glasfaserkabels:

- keine Magnetisierung,
- keine freien Ladungsträger,
- durch das äußere E-Feld wird aber eine Polarisierung erzeugt:



Atom im Glasfaserkabel

Nach den Maxwellgleichungen gilt

$$-\nabla \cdot P = \frac{\rho_{pol}}{\varepsilon_0} \qquad (\rho_{pol}: \text{Ladungsdichte der Polarisierung})$$

$$\Rightarrow \quad \nabla \cdot j_{pol} = -\partial_t \rho_{pol} = -\varepsilon_0 \nabla \cdot \partial_t P$$

$$\Rightarrow \quad j_{pol} = \varepsilon_0 \partial_t P \qquad (j_{pol}: \text{durch die Polarisierung erzeugte Stromdichte})$$

Einsetzen in die Maxwellgleichungen liefert:

$$\nabla \cdot E = -\nabla \cdot P$$

$$\nabla \times E = -\partial_t B$$

$$c^2 \nabla \times B = \partial_t E + \partial_t P$$

$$\nabla \cdot B = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\nabla\times(\nabla\times E)}_{=\nabla(\nabla\cdot E)-\Delta E} = \underbrace{-\partial_t(\nabla\times B)}_{=-\partial_t^2 E-\partial_t^2 P}$$

$$\Rightarrow \quad \partial_t^2 E + \partial_t^2 P = \Delta E - \nabla(\nabla\cdot E)$$

Wie hängt P von E ab?

Wir brauchen ein konstitutives Gesetz $P = P(E)$. Hierfür gibt es verschiedene Modelle.

Modellierung der Atome als Oszillatoren: Sei $x(t)$ die Auslenkung eines Elektrons aus seiner „Ruhelage". Dann gilt nach Newton:

$$m\frac{d^2}{dt^2}x = \underbrace{qE}_{\text{elektrische Kraft}} + \underbrace{q\frac{dx}{dt}\times B}_{\text{Lorentzkraft}}.$$

In unserer Situation vernachlässigen wir die Lorentzkraft. Durch Hinzunahme der durch die Polarisation induzierten Kräfte ergibt sich:

$$m\left(\frac{d^2}{dt^2}x + \underbrace{\gamma}_{\substack{\text{Dämpfungs-}\\\text{konstante}}}\frac{d}{dt}x + \underbrace{\omega_0^2}_{\substack{\text{Eigenfrequenz}\\\text{des Atoms}}}x\right) = \underbrace{q_e}_{\text{Elementarladung}}E.$$

Da die Polarisierung eine Art Mittelung über die ausgelenkten Elektronen ist, ergibt sich:

$$\partial_t^2 P + \gamma\partial_t P + \omega_0^2 P = dE$$

mit einer Konstanten $d>0$. Dieses Modell kann (für größere Auslenkungen) nichtlinear erweitert werden zu:

$$m\left(\frac{d^2}{dt^2}x + \gamma\frac{d}{dt}x + \omega_0^2 x + r|x|^2 x\right) = q_e E$$

mit $r\in\mathbb{R}$ bzw.:

$$\partial_t^2 P + \gamma\partial_t P + \omega_0^2 P + rP|P|^2 = dE.$$

(Aus Symmetriegründen treten keine quadratischen Terme auf.)

Insgesamt erhalten wir dann:

$$\partial_t^2 E = \Delta E - \nabla(\nabla \cdot E) - \partial_t^2 P$$

$$\partial_t^2 P + \gamma \partial_t P = -\omega_0^2 P - r P |P|^2 + d E .$$

$E|_{t=0}$, $P|_{t=0}$ bekannt $\Rightarrow$ $E(x,t)$, $P(x,t)$ berechenbar.

Mögliche Erweiterungen:

- Anisotrope Materialien: $d, \omega_0^2, r \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.
- Mehrere Eigenfrequenzen: $P = \sum_{j=1}^{N} P_j$,

$$\partial_t^2 P_j + \gamma_j \partial_t P_j = -\omega_j^2 P_j - r_j P_j |P_j|^2 + d_j E_j .$$

Mögliche Reduktionen:

- Keine Dämpfung: $\gamma = 0$.
- Eindimensionales Modell (z.B. bei polarisiertem Licht):

$$E(x_1, x_2, x_3, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ u(x_1,t) \\ 0 \end{pmatrix} , \quad P(x_1, x_2, x_3, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ p(x_1,t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \partial_t^2 u = \partial_{x_1}^2 u - \partial_t^2 p , \quad \partial_t^2 p + \gamma \partial_t p = -\omega_0^2 p - r p |p|^2 + d u .$$

Weitere, manchmal verwendete Vereinfachung:

$$\partial_t^2 p = u - u^3 \quad \Rightarrow \quad \partial_t^2 u = \partial_x^2 u - u + u^3 .$$

(Für diese Gleichung haben wir bereits die NLS-Approximation hergeleitet.)