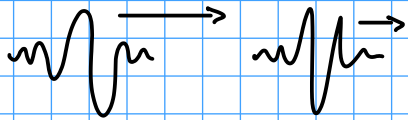


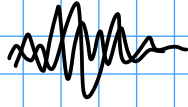
Anwendung:

Multiplexing: Gleichzeitige Übertragung verschiedener Datensätze (verschiedener Trägerwellen) in einem Glasfaserkabel ohne Informationsverlust.

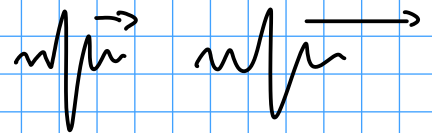
$t \ll 0$ :



$t = 0$ :



$t \gg 0$ :



NLS-Approximation: 
$$u(x,t) = \epsilon A(\epsilon(x-c_A t), \epsilon^2 t) e^{i(k_A x - \omega_A t)} + c.c. + \epsilon B(\epsilon(x-c_B t), \epsilon^2 t) e^{i(k_B x - \omega_B t)} + c.c.$$

für  $\partial_t^2 u = \partial_x^2 u - u - u^3$ , d.h.  $\omega_A^2 = k_A^2 + 1$ ,  $\omega_B^2 = k_B^2 + 1$ ,  $c_A = \frac{k_A}{\sqrt{k_A^2 + 1}}$ ,

$$c_B = \frac{k_B}{\sqrt{k_B^2 + 1}}.$$

$$\Rightarrow 2i\omega_A \partial_T A = (1 - c_A^2) \partial_X^2 A + 3A|A|^2 + 6A|B|^2,$$

$$2i\omega_B \partial_T B = (1 - c_B^2) \partial_X^2 B + 3B|B|^2 + 6B|A|^2.$$

(Wegen  $k_A - k_A + k_B = k_B$ , also  $A\bar{A}B$  taucht in der Gleichung für  $B$  auf, entsprechend wegen  $k_A + k_B - k_B = k_A$  taucht  $A\bar{B}B$  in der Gleichung für  $A$  auf.)

Sei dabei außerdem  $|3k_A| \neq |k_B|$  und  $|3k_B| \neq |k_A|$ .

Es gilt:

$$\begin{aligned} |A/B|^2 &= \underbrace{|A(\epsilon(x-c_A t))|}_{=: X_A} \underbrace{|B(\epsilon(x-c_B t))|}_{=: X_B} \\ &= A(X_A) \cdot |B(X_A - \epsilon(c_B - c_A)t)|^2 \\ &= A(X_A) \cdot |B(X_A - (c_B - c_A)\frac{T}{\epsilon})|^2, \end{aligned}$$

d.h.  $B$  bewegt sich auf der Zeitskala der NLS-Gleichung relativ zu  $A$  mit der Geschwindigkeit  $\frac{c_B - c_A}{\varepsilon}$ , d.h. die effektive Wechselwirkungszeit ist  $\mathcal{O}(\varepsilon)$ .

Also ist zu erwarten, dass die Wechselwirkung für hinreichend kleines  $\varepsilon$  vernachlässigbar ist. Ersetzt man die obigen beiden NLS-Gleichungen durch die ungekoppelten NLS-Gleichungen für  $A$  und  $B$ , dann bleibt im Residuum z.B. der Term  $\varepsilon^3 A |B|^2 e^{i(k_A x - \omega_A t)}$  stehen. Da die Wellenpakete lokalisiert sind, können wir voraussetzen, dass  $\|A\|_{H^s(\mathbb{R}^m)}, \|B\|_{H^s(\mathbb{R}^m)} < \infty$  ist.

$$\Rightarrow \left\| \varepsilon^3 A(\varepsilon(x - c_A t), \varepsilon^2 t) |B(\varepsilon(x - c_B t), \varepsilon^2 t)|^2 e^{i(k_A x - \omega_A t)} \right\|_{L^2}$$

$$\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |g^{-m}(\varepsilon(x - c_A t)) g^{-2m}(\varepsilon(x - c_B t))|$$

$$\cdot \left\| \varepsilon^3 A(\varepsilon(x - c_A t), \varepsilon^2 t) \cdot g^m(\varepsilon(x - c_A t)) \right.$$

$$\left. \cdot |B(\varepsilon(x - c_B t), \varepsilon^2 t) g^m(\varepsilon(x - c_B t))|^2 \right\|_{L^2}$$

$$\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \left( \frac{1}{1 + (\varepsilon(x - c_A t))^2} \right)^{m/2} \left( \frac{1}{1 + |\varepsilon(x - c_B t)|^2} \right)^m \right|$$

$$\cdot \varepsilon^{-1/2} \|A\|_{H^s_X(\mathbb{R}^m)} \|B\|_{H^s_X(\mathbb{R}^m)}^2 \varepsilon^3$$

$$\leq \varepsilon^{5/2} q(t) \|A\|_{H^s_X(\mathbb{R}^m)} \|B\|_{H^s_X(\mathbb{R}^m)}^2$$

mit

$$|q(t)| \leq C (1 + (|c_B - c_A| \varepsilon t)^2)^{-m/2}.$$

In den Fehlerabschätzungen taucht

$$\int_0^t \| \text{Res}(\varepsilon \Psi(\tau)) \|_{H^s} d\tau$$

auf und daher auch

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \left\| A(\cdot) |B(\cdot)|^2 e^{i(k_A x - \omega_A t)} \right\|_{H^s} d\tau \\
& \leq C \varepsilon^{5/2} \int_0^t q(\tau) d\tau \\
& \leq C \varepsilon^{5/2} \int_0^{T_0/\varepsilon^2} \left( \frac{1}{1 + (|c_B - c_A| \varepsilon \tau)^2} \right)^{m/2} d\tau \\
& \leq C \varepsilon^{5/2} \int_0^{T_0/\varepsilon} \left( \frac{1}{1 + (|c_B - c_A| s)^2} \right)^{m/2} \frac{ds}{\varepsilon} \\
& = \mathcal{O}(\varepsilon^{3/2}), \quad \text{falls } m > 1.
\end{aligned}$$

Die Störung durch die Wechselwirkung ist also von  $\mathcal{O}(\varepsilon^{3/2}) \ll \mathcal{O}(\varepsilon)$  (was die physikalische Skala für die Einhüllende ist).

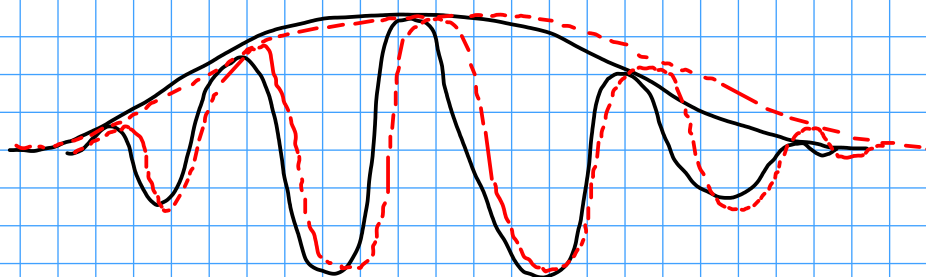
Bem.: Untersucht man die Wechselwirkung durch modifizierte Ansätze noch genauer, dann erhält man

$$u \approx \varepsilon \sum_{j=1}^N A_j(\varepsilon(x - c_j t - \varepsilon \psi_j(x, t))) e^{i(k_j x + \omega_j t + \varepsilon \Omega_j(x, t))} + \text{c.c.}$$

Für  $N=2$ :

$$\varepsilon \Omega_A \sim \frac{1}{c_B - c_A} \int |B|^2 = \mathcal{O}(\varepsilon),$$

$$\varepsilon \psi_B \sim \frac{1}{c_B - c_A} \int |B|^2 = \mathcal{O}(\varepsilon).$$



Wir haben also eine sehr kleine Verschiebung der Trägerwelle sowie der Einhüllenden (was aber keinen Einfluss auf die Informationsübertragung hat).

Für viele Anwendungen in der nichtlinearen Optik ist es besser, die Wellengleichung

$$\partial_t^2 u = \partial_x^2 u - u + u^3$$

durch

$$\partial_t^2 u = \partial_x^2 u - a(x)u + b(x)u^3$$

mit  $a(x) = a(x+2\pi)$ ,  $b(x) = b(x+2\pi)$  zu ersetzen.

Bsp.: Licht in photonischen Kristallen (dielektrisches Medium (z.B. Glas) mit periodischer Struktur, deren Wellenlänge vergleichbar zu der von Licht ist, das heißt  $\sim 10^{-6}$  m).

Ziel: Herleitung und Rechtfertigung für die neue Wellengleichung.

Schwierigkeit: Da  $x$ -abhängige Koeffizienten vorliegen, kann man nicht mehr mit Hilfe der Fouriertransformation diagonalisieren.

Ersatz: Blochwellentransformation.

Betrachte zunächst das lineare Problem

$$\partial_t^2 u = \partial_x^2 u - a(x)u$$

mit  $a(x) > 0$ ,  $a(x) = a(x+2\pi)$  und  $a$  glatt.

Ansatz:  $u(x,t) = e^{i\omega t} v(x)$ .

$$\Rightarrow \partial_x^2 v - a(x)v = -\omega^2 v.$$

Ansatz:  $v(x) = e^{ilx} \omega(x)$  mit  $\omega(x) = \omega(x+2\pi)$ .

$$\Rightarrow (\partial_x + il)^2 \omega - a(x)\omega = -\omega^2 \omega.$$

↑     ↑  
Omega     $\omega$