Sei $L = (\partial_x + i\ell)^2 - a$. Dann gilt:

- Für festes ℓ liegt ein gleichmäßig elliptischer Differentialoperator auf einem beschränkten Gebiet $(0,2\pi)$ vor. Aus der Funktionalanalysis wissen wir, dass $L^{-1}: L^2(0,2\pi) \to H^2(0,2\pi)$ existiert und stetig ist. Wegen der kompakten Einbettung $H^2(0,2\pi) \hookrightarrow L^2(0,2\pi)$ ist $L^{-1}: L^2(0,2\pi) \to L^2(0,2\pi)$ kompakt. Nach dem Spektralsatz für kompakte, lineare Operatoren besitzt L^{-1} nur diskrete Eigenwerte mit 0 als einzig möglichem Häufungspunkt, d.h. $\exists \mu_n : L^{-1} f_n = \mu_n f_n$ und $\mu_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Für unser L ist 0 tatsächlich Häufungspunkt.

  $\Rightarrow L f_n = \frac{1}{\mu_n} f_n$, d.h. L besitzt diskretes Spektrum mit einzigem "Häufungspunkt" bei $\pm\infty$.

- L ist selbstadjungiert bezüglich L^2 (vgl. Übungen).

  $\Rightarrow$ Alle EW sind reell.

- L ist negativ definit.

- Außer in den Schnittpunkten sind die Eigenwertkurven $\lambda_n = \lambda_n(\ell)$ von $L(\ell) = (\partial_x + i\ell)^2 - a$ glatte Kurven.

  Beweisidee (für endlich-dimensionale [Operatoren] Probleme):

  Betrachte
  $$(L + \delta B) u = \lambda u \qquad \text{mit } 0 < \delta \ll 1.$$
  Sei $(f_j)_j$ eine Orthonormal-Basis aus Eigenfunktionen von L. Wir zeigen nun, dass λ_1 stetig bzw. glatt von δ abhängt. Sei
  $$u = \sum_j c_j f_j \quad , \quad c_j \in \mathbb{C}.$$

$$\Rightarrow (L+\delta B)u \overset{!}{=} \lambda u$$

$$\Rightarrow \sum_j c_j \lambda_j f_j + \delta \sum_j c_j B f_j = \lambda \sum_j c_j f_j$$

$$\Rightarrow c_m \lambda_m + \delta \sum_j c_j \langle f_m, B f_j \rangle = \lambda c_m .$$

Sei $\lambda = \lambda_1 + \tilde{\lambda}$ mit $\tilde{\lambda}$ klein.

$$\Rightarrow \tilde{\lambda} c_1 + \delta \sum_j c_j \langle f_1, B f_j \rangle = 0 \qquad (1)$$

$$(\lambda_2 - \lambda_1 - \tilde{\lambda}) c_2 + \delta \sum_j c_j \langle f_2, B f_j \rangle = 0 \qquad (2)$$

$$\vdots$$

Falls λ_1 ein einfacher EW ist, können wir die Gleichungen (2)–... nach dem Satz über implizite Funktionen nach $c_2, c_3, \dots$ usw. auflösen, d.h.

$$c_j = c_j(c_1, \tilde{\lambda}, \delta) \qquad \text{für } j = 2, \dots$$

$$= g_j(\tilde{\lambda}, \delta) c_1$$

mit $g_j(\tilde{\lambda}, \delta) = \mathcal{O}(|\tilde{\lambda}| + |\delta|)$. Einsetzen in (1) ergibt:

$$c_1(-\tilde{\lambda}) + \delta c_1 \mathcal{O}(|\tilde{\lambda}| + |\delta|) = 0$$

$$\Rightarrow \tilde{\lambda} = \delta\, \mathcal{O}(|\tilde{\lambda}| + |\delta|)$$

Satz über impl. Fktn.: $\Rightarrow \tilde{\lambda} = \mathcal{O}(|\delta|)$.

Die Glattheit folgt auch aus dem impliziten Funktionensatz. Für unser L wäre $\delta B = \left((\partial_x + i\ell)^2 - a\right) - \left((\partial_x + i(\ell+\delta))^2 - a\right)$.

Was passiert bei mehrfachen Eigenwerten?

<u>Bsp.:</u> $(\partial_x + i\ell)^2 \omega + \lambda\,(1 + 2\mathcal{E}\cos(2x))\,\omega = 0$

(Herkunft: [Maxwellgl. mit Polarisierung]

$$\partial_t^2 (E+P) = \partial_x^2 E \quad , \quad P(x) = s(x)\,E(x)$$

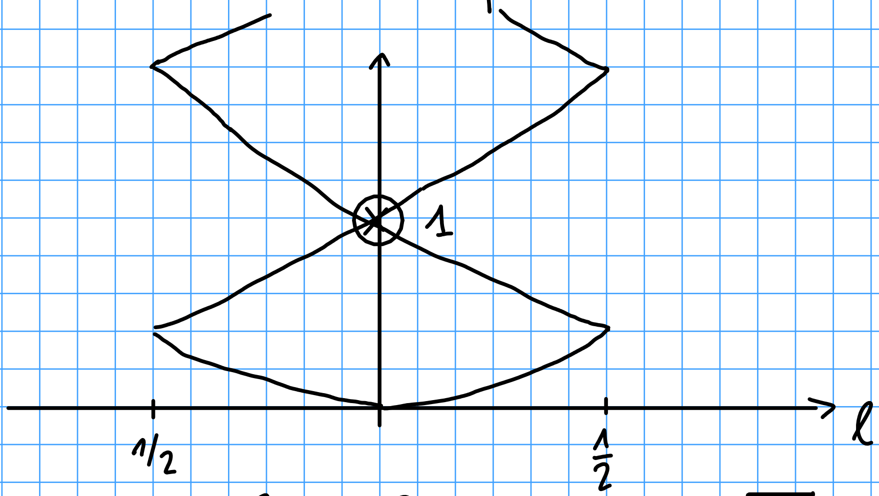
$$E(x) = \omega(x)\,e^{i\omega t} \quad \rightsquigarrow \quad -s(x)\,\omega^2 w = \partial_x^2 w. \;)$$

Für $\mathcal{E}=0$ ist das Problem explizit lösbar:

$$(\partial_x + i\ell)^2 \omega + \lambda\omega = 0$$

$$\omega(x) = e^{inx} \quad \Rightarrow \quad (in + i\ell)^2\omega + \lambda\omega = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = (n+\ell)^2.$$

Was passiert bei $\ell = 0$, $\lambda = 1$ für $\mathcal{E} > 0$?



Mit $2\cos(2x) = e^{2ix} + e^{-2ix}$, $\quad \omega(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ und

$\lambda = 1 + \tilde{\lambda}$ ergibt sich

$$(in + i\ell)^2 c_n + (1+\tilde{\lambda})\,c_n + \mathcal{E}\left(c_{n+2} + c_{n-2}\right) = 0$$

(Koeffizient bei e^{inx})

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} -(1+\ell)^2 c_1 + (1+\tilde{\lambda})\,c_1 + \mathcal{E}\,(c_3 + c_{-1}) &= 0 \qquad (1) \\ -(-1+\ell)^2 c_{-1} + (1+\tilde{\lambda})\,c_{-1} + \mathcal{E}\,(c_1 + c_{-3}) &= 0 \qquad (-1) \\ -(2+\ell)^2 c_2 + (1+\tilde{\lambda})\,c_2 + \mathcal{E}\,(c_0 + c_4) &= 0 \qquad (2) \\ &\vdots \end{aligned}$$

(1), (−1): nicht auflösbar

(2): auflösbar, falls $\tilde{\lambda}$ und $\mathcal{E}$ klein sind

$$\Rightarrow \forall\, |j|\geq 2: \quad c_j = c_j(\ell, \tilde{\lambda}, \varepsilon, c_1, c_{-1}) = \mathcal{O}(|\ell| + |\tilde{\lambda}| + |\varepsilon|)\,\mathcal{O}(|c_1| + |c_{-1}|).$$

Einsetzen in (1), (-1) liefert:

$$(-2\ell - \ell^2 + \tilde{\lambda})\,c_1 + \varepsilon c_{-1} + \varepsilon\,\mathcal{O}(|\ell| + |\tilde{\lambda}| + |\varepsilon|)\,\mathcal{O}(|c_1| + |c_{-1}|) = 0,$$

$$(2\ell - \ell^2 + \tilde{\lambda})\,c_{-1} + \varepsilon c_1 + \varepsilon\,\mathcal{O}(|\ell| + |\tilde{\lambda}| + |\varepsilon|)\,\mathcal{O}(|c_1| + |c_{-1}|) = 0,$$

bzw.

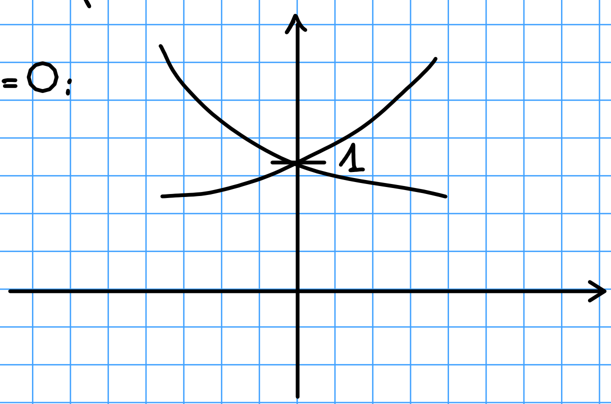
$$\begin{pmatrix} -2\ell + \ell^2 + \varepsilon\,\mathcal{O}(\dots) & \varepsilon + \varepsilon\,\mathcal{O}(\dots) \\ \varepsilon + \underset{\substack{\uparrow \\ [\varepsilon ?]}}{\mathcal{O}}(\dots) & 2\ell + \ell^2 + \varepsilon\,\mathcal{O}(\dots) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Um nichttriviale Lösungen c_1, c_{-1} zu finden, muss die Determinante der Matrix $= 0$ sein.

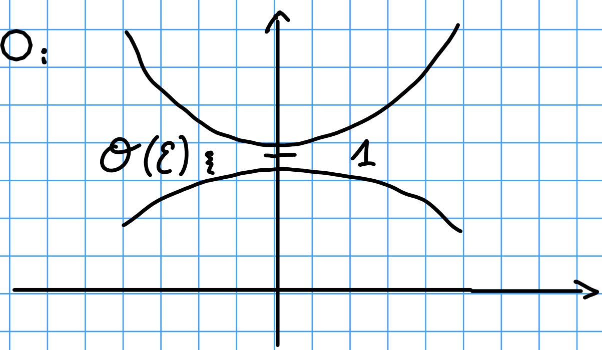
$$\Rightarrow \tilde{\lambda}^2 - \varepsilon^2 + \mathcal{O}(\dots) = 0 \qquad \Rightarrow \tilde{\lambda}_{1/2} \approx \pm \varepsilon,$$

d.h. der doppelte Eigenwert $\lambda = 1$ spaltet sich für $\varepsilon > 0$ in zwei einfache EW auf.

$\varepsilon = 0$:



$\varepsilon > 0$:



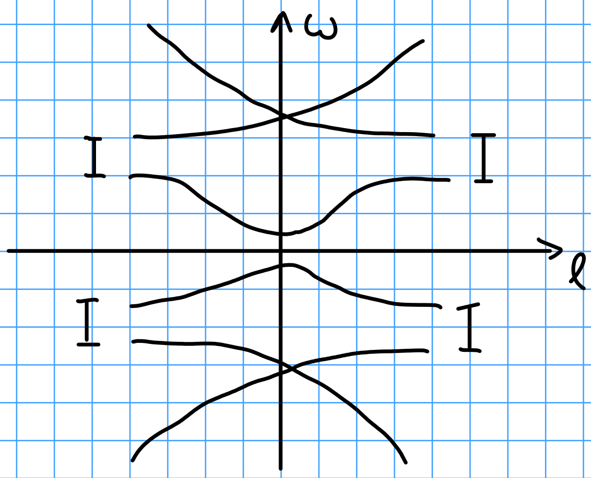
[das ist nur eine Möglichkeit, der EW könnte auch gleich bleiben]

Somit besteht das Spektralbild von

$$\partial_t^2 u = \partial_x^2 u - \left(a(x) + b(x)\,u^2\right) u$$

aus glatten Kurven, die sich schneiden können, aber auch aufbrechen können und Spektrallücken hinterlassen können. Das genaue Spektralbild hängt von $a = a(x)$ ab.

Typische Situation $(\lambda = \omega^2)$:



Für nähere Beweisdetails siehe z.B. Reed, Simon: Methods of Modern Mathematical Physics, Band 4, Kap. XIII. 16.

<u>Definition:</u> Blochwellentransformation

$$u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(k)\, e^{ikx}\, dk = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{-\frac{1}{2}}^{1/2} \hat{u}(j+\ell)\, e^{ijx} e^{i\ell x}\, d\ell$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \underbrace{\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \hat{u}(j+\ell)\, e^{ijx} \right)}_{=: \tilde{u}(\ell, x)} e^{i\ell x}\, d\ell$$

$=: \tilde{u}(\ell, x)$ ← Blochwellentransformierte

$\rightsquigarrow \quad \tilde{u}(\ell, x) = \tilde{u}(\ell, x+1)$

[Periode kann bel. gewählt werden, z.B. auch 2π]