

Analytische Eigenschaften der Blochwellentransformation:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x)|^2 dx &= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{u}(k)|^2 dk \\
 &= 2\pi \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |\hat{u}(j+l)|^2 dl = 2\pi \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\hat{u}(j+l)|^2 dl \\
 &= 2\pi \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} \hat{u}(j+l) e^{ijx} \overline{\hat{u}(j+l) e^{-ijx}} \right) dl \\
 &= 2\pi \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} \hat{u}(j+l) e^{ijx} \right) \left(\sum_{j' \in \mathbb{Z}} \overline{\hat{u}(j'+l) e^{-ij'x}} \right) dx dl \\
 &= 2\pi \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \tilde{u}(l,x) \overline{\tilde{u}(l,x)} dx dl \\
 &= 2\pi \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} |\tilde{u}(l,x)|^2 dx dl.
 \end{aligned}$$

Die Blochtransformation ist also ein Isomorphismus zwischen $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ und $L^2\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], L^2(0, 2\pi), \mathbb{C}\right) = L^2\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \times (0, 2\pi), \mathbb{C}\right)$. Außerdem gilt

$$\widetilde{\partial_x u}(l, x) = (\partial_x + il) \tilde{u}(l, x).$$

Somit ist die Blochtransformation auch ein Isomorphismus zwischen $H^s(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ und $L^2\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), H^s(0, 2\pi), \mathbb{C}\right)$. Ist $|u(x)| \leq C|x|^{-n}$, dann ist \tilde{u} bzgl. l n -mal differenzierbar. [periodisch fortgesetzt]

Für die Multiplikation erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 u(x)v(x) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \tilde{u}(l-m, x) \tilde{v}(m, x) dm \right) e^{ilx} dl. \\
 &= \tilde{u} * \tilde{v}(l, x)
 \end{aligned}$$

(siehe Übungen, Blatt 7)

Anwendung auf

$$\partial_t^2 u = \partial_x^2 u - a(x)u + b(x)u^3 = L(\partial_x)u + N(x,u).$$

Blochtrafo

$$\implies \partial_t^2 \tilde{u} = \underbrace{(\partial_x + i\ell)^2 \tilde{u} - a(x)\tilde{u}}_{\tilde{L}(\partial_x, \ell)\tilde{u}} + b(x)\tilde{u}^{*3}.$$

$\tilde{L}(\partial_x, \ell)$ ist selbstadjungiert und besitzt ONB aus Eigenfunktionen $f_j(\ell)$,
also

$$\tilde{L}(\partial_x, \ell) f_j(\ell) = -\omega_j^2(\ell) f_j(\ell).$$

Ansatz:

$$\tilde{u}(\ell, x, t) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \tilde{u}_j(\ell, t) f_j(\ell, x)$$

$$\implies \partial_t^2 \tilde{u} = \sum_{j \in \mathbb{N}} \partial_t^2 \tilde{u}_j(\ell, t) f_j(\ell, x).$$

$$\tilde{L}(\partial_x, \ell) \tilde{u}(\ell, x, t) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \tilde{L}(\partial_x, \ell) \tilde{u}_j(\ell, t) f_j(\ell, x)$$

$$= \sum_{j \in \mathbb{N}} \tilde{u}_j(\ell, t) \tilde{L}(\partial_x, \ell) f_j(\ell, x) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \tilde{u}_j(\ell, t) (-\omega_j^2(\ell)) f_j(\ell, x)$$

$$= \sum_{j \in \mathbb{N}} -\omega_j^2(\ell) \tilde{u}_j(\ell, t) f_j(\ell, x).$$

$$b(x) \tilde{u}^{*3}(\ell, x, t) = b(x) \iint \tilde{u}(\ell-m, x, t) \tilde{u}(m-n, x, t) \tilde{u}(n, x, t) \, dn \, dm$$

$$= b(x) \iint \left(\sum \tilde{u}_{j_1}(\ell-m, t) f_{j_1}(\ell-m, x) \right) \left(\sum \tilde{u}_{j_2}(m-n, t) f_{j_2}(m-n, x) \right) \\ \cdot \left(\sum \tilde{u}_{j_3}(n, t) f_{j_3}(n, x) \right) \, dn \, dm.$$

Teste die Differentialgleichung mit f_j :

$$\partial_t^2 \tilde{u}_j(l, t) = -\omega_j^2(l) \tilde{u}_j(l, t) + \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} \sum_{j_1, j_2, j_3} S_{j_1 j_2 j_3}^j(l-m, m-n, n)$$

$$\cdot \tilde{u}_{j_1}(l-m, t) \tilde{u}_{j_2}(m-n, t) \tilde{u}_{j_3}(n, t) \, dn \, dm$$

mit

$$S_{j_1 j_2 j_3}^j(l-m, m-n, n) = \int_0^{2\pi} f_j(x) b(x) f_{j_1}(l-m, x) f_{j_2}(m-n, x) f_{j_3}(n, x) \, dx.$$

Umschreiben als System 1. Ordnung mittels

$$\tilde{v}_j(l, t) = (\omega_j(l))^{-1} \partial_t \tilde{u}_j(l, t)$$

und diagonalisieren von

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}_j(l, t) \\ \tilde{v}_j(l, t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_j(l, t) \\ z_{-j}(l, t) \end{pmatrix}$$

liefert:

$$\partial_t z_1(l, t) = i\omega_1(l) z_1(l, t) + \dots$$

$$\partial_t z_{-1}(l, t) = -i\omega_1(l) z_{-1}(l, t) + \dots$$

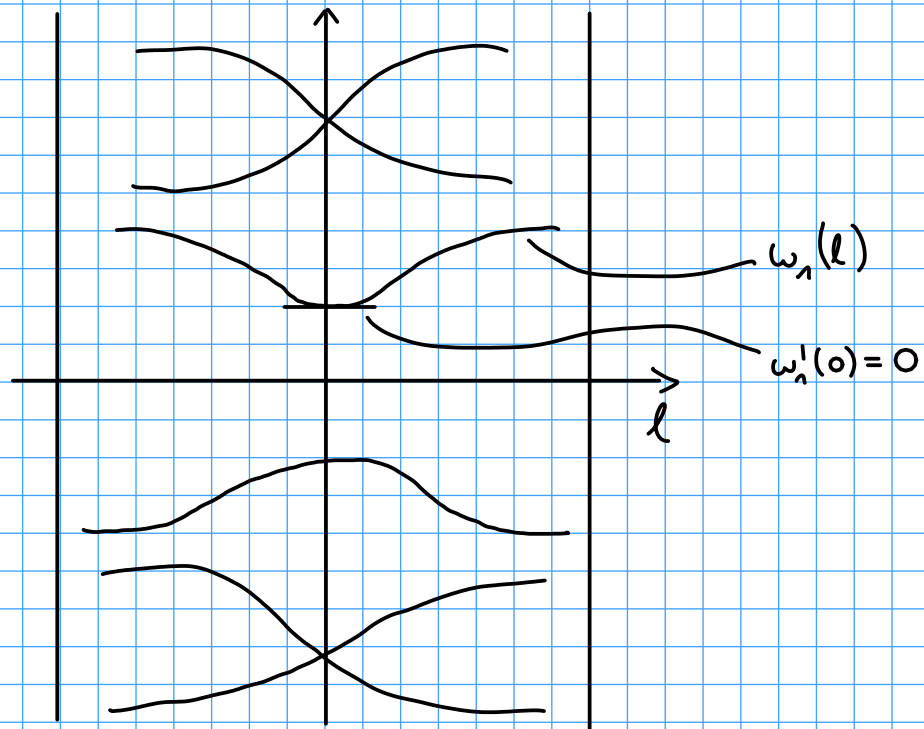
$$\partial_t z_2(l, t) = i\omega_2(l) z_2(l, t) + \dots$$

⋮

also unendlich viele Gleichungen, die von derselben Form wie im räumlich homogenen Fall sind. Einziger Unterschied: die nichtlinearen

Terme haben zwar ebenfalls Faltungsstruktur, aber mit Integral $\int_{-1/2}^{1/2}$ statt $\int_{-\infty}^{\infty}$. Da aber die Blochmoden um ein l_0 stark konzentriert sind, spielt dieses keine Rolle für die Herleitung der NLS-Gleichung (für z_1 oder z_{-1}), welche analog zum räumlich homogenen Fall hergeleitet werden kann (Herleitungsvariante im Fourierraum).

Als Beispiel betrachten wir den Fall stehendes Lichtpulse:



Approximationsansatz:

$$z_n(l, t) = \varepsilon \varepsilon^{-1} \hat{A}_n \left(\frac{l}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^2} \right) e^{i\omega_n(0)t} + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

$$z_{-n}(l, t) = \varepsilon \varepsilon^{-1} \hat{A}_{-n} \left(\frac{l}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^2} \right) e^{-i\omega_n(0)t} + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

liefert NLS-Gleichungen der Form:

$$\partial_T \hat{A}_n(L, T) = \frac{i}{2} \omega_n''(0) L^2 \hat{A}_n(L, T)$$

$$+ i\gamma \int_{\varepsilon \rightarrow 0}^{\frac{1}{\varepsilon^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{A}_n(L-M, T) \hat{A}_n(M-N, T) \hat{A}_{-n}(N, T) dN dM$$

mit $L = \frac{l}{\varepsilon}$, $T = \frac{t}{\varepsilon^2}$.

$$\Rightarrow u(x, t) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \varepsilon \varepsilon^{-1} \hat{A}_n \left(\frac{l}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^2} \right) e^{i\omega_n(0)t} e^{ilx} f_n(l, x) dl + c.c.$$

$$= \int_{-\frac{1}{2\varepsilon}}^{\frac{1}{2\varepsilon}} \varepsilon \hat{A}_n(L, T) e^{i\omega_n(0)t} e^{iL\varepsilon x} f_n(\varepsilon L, x) dL + c.c.$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon \hat{A}(L, T) e^{i\omega_1(L)t} e^{iL\varepsilon x} f_1(0, x) dL + c.c. + \mathcal{O}(\varepsilon^2) + \mathcal{O}(\varepsilon^n)$$

Entwicklung von f_1 :

$$f_1(\varepsilon L, x) = f_1(0, x) + \varepsilon L \partial_L f_1(\xi, x)$$

$$\int_{-\frac{1}{2\varepsilon}}^{\frac{1}{2\varepsilon}} \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}, \text{ falls } A \in H^n$$

$$= \varepsilon A(\varepsilon x, \varepsilon^2 t) e^{i\omega_1(0)t} f_1(0, x) + c.c. + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Analog zum räumlich homogenen Fall kann man durch Hinzunahme von Korrekturtermen zur Approximation das Residuum beliebig klein machen (sofern die Nichtresonanzbedingungen erfüllt sind, was in der Regel erfüllt ist).

Sei $\varepsilon^{3/2} R = u - \varepsilon \psi$ ← erweiterter Ansatz

$$\Rightarrow \partial_t^2 R = \chi_1 \partial_x^2 R - \chi_2 R + 3\varepsilon^2 \chi_3 \psi^2 R + 3\varepsilon^{5/2} \chi_3 \psi R^2 + 3\varepsilon^3 \chi_3 R^3 + \varepsilon^{-3/2} \text{Res}(\varepsilon \psi)$$

mit periodischen Koeffizienten χ_j . Testen mit $\chi_1^{-1} R$ liefert analog zum räumlich homogenen Fall:

$$\partial_t E \leq C_1 \varepsilon^2 E + C_2 \varepsilon^{5/2} E^{3/2} + C_3 \varepsilon^3 E^2 + C_4 \varepsilon^2$$

$$\text{für } E = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_1^{-1} (\partial_t R)^2 + (\partial_x R)^2 + \chi_1^{-1} R^2 dx.$$

Mit Hilfe der Gronwall'schen Ungleichung ergibt sich dann ein analoger Approximationssatz wie im räumlich homogenen Fall.