3. Die Approximationen durch die Witham-Gleichungen und die nichtviskose Burgers-Gleichung

Wir betrachten wiederum die Boussinesq-Gleichung

$$\partial_t^2 u = \partial_x^2 u - \partial_x^4 u + \partial_x^2 (u^2)$$

mit $x, t, u(x,t) \in \mathbb{R}$. Je nach Skalierung eines Approximationsansatzes können wir unterschiedliche Approximationsgleichungen herleiten.

Sei

$$u(x,t) = \varepsilon^\alpha A(X,T)$$

mit $X = \varepsilon(x-t)$, $T = \varepsilon^{1+\alpha} t$, $\alpha > 0$ und $A(X,T) \in \mathbb{R}$. Wir wissen bereits, dass wir für $\alpha = 2$ durch Einsetzen in die Boussinesq-Gleichung und Balancieren der Koeffizienten vor den ε-Potenzen die KdV-Gleichung als Approximationsgleichung erhalten. Für $\alpha > 2$ ergibt sich als Approximationsgleichung die [lineare!] Airy-Gleichung

$$\partial_T A = \frac{1}{2} \partial_X^3 A.$$

Für $0 < \alpha < 2$ ergibt sich die nicht-viskose Burgers-Gleichung

$$\partial_T A = -\frac{1}{2} \partial_X (A^2).$$

Sei nun

$$u(x,t) = \varepsilon^\beta U(X,T)$$

mit $X = \varepsilon x$, $T = \varepsilon t$ und $U(X,T) \in \mathbb{R}$. Für $\beta = 2$ ergibt sich als Approximationsgleichung die lineare Wellengleichung. Für $\beta = 0$ ergibt sich

$$\partial_T^2 U = \partial_X^2 U + \partial_X^2 (U^2)$$

bzw.

$$\begin{cases} \partial_T U = \partial_X V \\ \partial_T V = \partial_X U + \partial_X (U^2). \end{cases}$$

Dieses System nennt man die Witham-Gleichungen. Die Rechtfertigungsbeweise für diese Approximationen gehen analog zum KdV-Fall. Einziger Unterschied: andere Skalierung (bzgl. Potenzen von ε).

Wegen $\beta = 0$ muss man für die Rechtfertigung der Whitham-Approximation noch fordern, dass

$$|U(X, T=0)| \leq q \ll 1,$$

wobei q unabhängig von ε ist. Grund: Kontrolle der nichtlinearen Terme.

Die allgemeine Theorie der Whitham-Approximation ist aber noch weniger entwickelt als die Theorie der KdV- oder der NLS-Approximation. Die Whitham-Approximation wird insbesondere verwendet zur näherungsweisen Beschreibung von langsamen Modulationen bezüglich Ort und Zeit von periodischen Lösungen F_{per} eines dispersiven Systems

$$\partial_t F = \begin{pmatrix} i\omega & 0 \\ 0 & -i\omega \end{pmatrix} F + \mathcal{N}(F),$$

d.h. die Whitham-Gleichungen sollen die Evolution von $F - F_{per}$ näherungsweise beschreiben. $F - F_{per}$ ist exakte Lösung eines dispersiven Systems mit periodischen Koeffizienten (erzeugt durch $\mathcal{N}(\underbrace{F}_{\parallel \; ((F-F_{per})+F_{per})}) - \mathcal{N}(F_{per})$).

Der Approximationsansatz ist dabei:

$$(F - F_{per})(x,t) = U(X,T)$$

mit $X = \varepsilon x$ und $T = \varepsilon t$. Verglichen mit der NLS-Approximation für Systeme mit periodischen Koeffizienten hat man die zusätzliche Schwierigkeit, dass man bei nichtlinearen Termen ohne Ableitung keine ε-Potenzen gewinnt. Außerdem ist die Fourier- und Blochwellentransformation um die Mode 0 stark konzentriert, was zu schwieriger zu kontrollierenden Resonanzen führt. Bisher sind erst spezielle Systeme verstanden. Ist die Orginalgleichung rotationsinvariant wie z.B. die NLS-Gleichung, dann kann man durch Übergang zu Polarkoordinaten die Situation eines Systems mit konstanten Koeffizienten erreichen. Für nichtlineare Gleichungen mit periodischen Koeffizienten existiert bisher nur ein Rechtfertigungsbeweis für den Fall der Boussinesq-Gleichung mit periodischen Koeffizienten. Die Argumentation ist eine Kombination der

Argumente aus dem Fall der Boussinesq-Gleichung mit konstanten Koeffizienten und dem Rechtfertigungsbeweis der NLS-Approximation für die nichtlineare Wellengleichung mit periodischen Koeffizienten.