MGl. Vorlesung 2 Di, 05.04.2016

$$\omega(k) = ak + bk^3 + \mathcal{O}(k^5) \quad , \quad a,b \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \quad \text{für } |k| \ll 1$$

$$\frac{\tilde{\xi}(k)}{\omega(k)} = qk + \mathcal{O}(k^3) \quad , \quad q \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \quad \text{für } |k| \ll 1$$

$$B(k) = \begin{pmatrix} b_{11}(k) & b_{12}(k) \\ b_{21}(k) & b_{22}(k) \end{pmatrix} \quad , \quad b_{ij} = q_{ij}k + \mathcal{O}(k^3) \quad \text{für } |k| \ll 1,$$

$q_{11}, q_{22} \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $q_{12}, q_{21} \in \mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & -i\tanh(k) \\ -ik & 0 \end{pmatrix}$$

$i\sqrt{k\tanh k}$

$-i\sqrt{k\tanh k}$

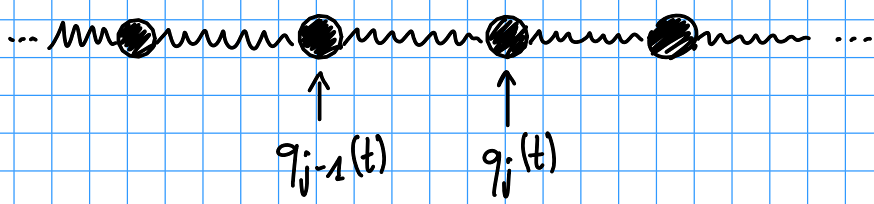
Beispiel:

Wir betrachten das sog. Fermi-Pasta-Ulam (FPU)-System

$$\partial_t^2 q_j = W'(q_{j+1}(t) - q_j(t)) - W'(q_j(t) - q_{j-1}(t)) \quad , \quad j \in \mathbb{Z},$$

$W: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(Modell für unendlich ausgedehnte Oszillatorketten)



Sei $u(j,t) = (q_{j+1} - q_j)(t)$ und $W'(u) = a_1 u + a_2 u^2 + \ldots$ mit $a_1 > 0$, $a_j \in \mathbb{R}$.

Die Linearisierung der resultierenden Gleichung für u ist dann

$$\partial_t^2 u(j,t) = a_1\big(u(j+1,t) - 2u(j,t) + u(j-1,t)\big) \quad , \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Sie hat die Lösungen

$$u(j,t) = e^{i(kj + \omega t)}$$

für beliebige $k \in \mathbb{R}$ und $\omega^2 = \omega^2(k) = -a_1(e^{ik} - 2 + e^{-ik}) = 2a_1(1 - \cos(k))$.

Für den nichtlinearen Fall betrachten wir als Beispiel $a_1 = a_2 = 1$, $a_j = 0$ für $j \geq 3$.

Fouriertransformation $\mathcal{F}$ der Gleichung für u liefert

$$\partial_t^2 \hat{u}(\underset{[-\pi,\pi]}{\underset{\cap}{k}},t) = -\omega^2(k)\hat{u}(k,t) + \mathcal{F}\left(u(\cdot+1)^2 - 2u(\cdot)^2 + u(\cdot-1)^2\right)(k)$$

mit

$$\mathcal{F}(\dots) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left(u(j+1)^2 - 2u(j)^2 + u(j-1)^2\right) e^{-ikj}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left(e^{ik} - 2 - e^{-ik}\right) u(j)^2 e^{-ikj}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{j\in\mathbb{Z}} -\omega^2(k) u^2(j) e^{-ikj}$$

$$= -\omega^2(k) \frac{1}{2\pi} \sum_{j\in\mathbb{Z}} u^2(j) e^{-ikj}$$

$$= -\omega^2(k) \int_{-\pi}^{\pi} \hat{u}(k-m,t)\hat{u}(m,t)\, dm .$$

Also $\partial_t^2 \hat{u}(k,t) = -\omega^2(k)\hat{u}(k,t) - \omega^2(k)\hat{u}^{*2}(k,t)$.

Die Gleichung für $\hat{u}$ hat also die Form, welche die Herleitung der KdV-Approximation ermöglicht.

2. Die NLS-Approximation

In NPDG haben wir gesehen, dass Einsetzen des Ansatzes

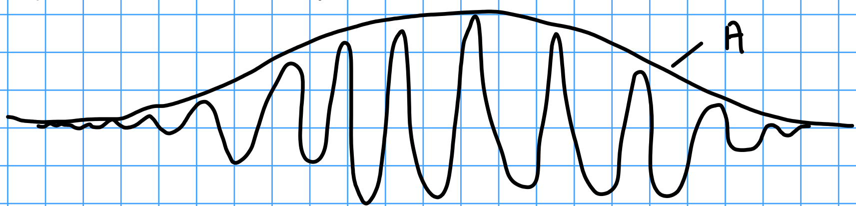
$$\begin{pmatrix}\eta\\ u_1\end{pmatrix}(x,t) = \varepsilon A\big(\varepsilon(x-ct), \varepsilon^2 t\big) e^{i(k_0 x - \omega(k_0)t)} \varphi(k_0)$$

$$+ \text{c.c.} + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

$\varepsilon \ll 1$, $\omega(k) = \operatorname{sign}(k)\sqrt{(k+bk^3)\tanh(k)}$, $c = \partial_k \omega(k_0)$, $\varphi(k_0) \in \mathbb{C}^2$ in die Wasserwellengleichungen zu führender Ordnung in ε die NLS-Gleichung

$$\partial_\tau A = i\nu_1 \partial_\xi^2 A + i\nu_2 A|A|^2, \quad \tau = \varepsilon^2 t, \quad \xi = \varepsilon(x-ct),$$

und $\nu_j = \nu_j(k_0) \in \mathbb{R}$ liefert.



Als weiteres zentrales Beispiel für die NLS-Approximation betrachten wir nun die nichtlineare Wellengleichung der Form

$$\partial_t^2 u = \partial_x^2 u - u + N(u),$$

$x, t, u(x,t) \in \mathbb{R}$, $N(u)$ eine noch zu wählende Nichtlinearität.

<u>1. Fall:</u> $N(u) = -u^3$

Ansatz für die NLS-Approximation

$$\varepsilon\psi_{NLS} = \varepsilon A\big(\overbrace{\varepsilon(x-c_g t)}^{=:X}, \overbrace{\varepsilon^2 t}^{=:T}\big) e^{i(k_0 x + \omega_0 t)} + \text{c.c.}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}(\varepsilon\psi_{NLS}) = -\partial_t^2(\varepsilon\psi_{NLS}) + \partial_x^2(\varepsilon\psi_{NLS}) - (\varepsilon\psi_{NLS}) - (\varepsilon\psi_{NLS})^3$$

$$= \varepsilon E\big((\omega_0^2 - k_0^2 - 1)A\big) + \varepsilon^2 E\big((2ik_0 - 2ic_g\omega_0)\partial_X A\big)$$

$$+ \varepsilon^3 E\big(-2i\omega_0 \partial_T A + (1-c_g^2)\partial_X^2 A - 3A|A|^2\big) + \varepsilon^3 E^3(-A^3)$$

$$+\varepsilon^4 E\left(2c_g \partial_X \partial_T A\right) + \varepsilon^5 E\left(-\partial_T^2 A\right) + c.c.$$

mit $E = e^{i(k_0 x + \omega_0 t)}$.

ε-Balance:

$$\omega_0^2 = k_0^2 + 1 \qquad \text{(Dispersionsrelation)}$$

ε^2-Balance:

$$c_g = \frac{k_0}{\omega_0} = \frac{d}{dk}\omega\Big|_{k=k_0} \qquad \text{(Gruppengeschw.)}$$

$\varepsilon^3 E$-Balance:

$$\partial_T A = -i\frac{(1-c_g^2)}{2\omega_0}\partial_X^2 A + i\frac{3}{2\omega_0} A|A|^2 \qquad \text{(NLS-Gleichung)}$$

$$\Rightarrow \quad Res(\varepsilon\psi) = \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$