II. Modulationsgleichungen für diffusive Systeme

4. Die Ginzburg-Landau-Approximation

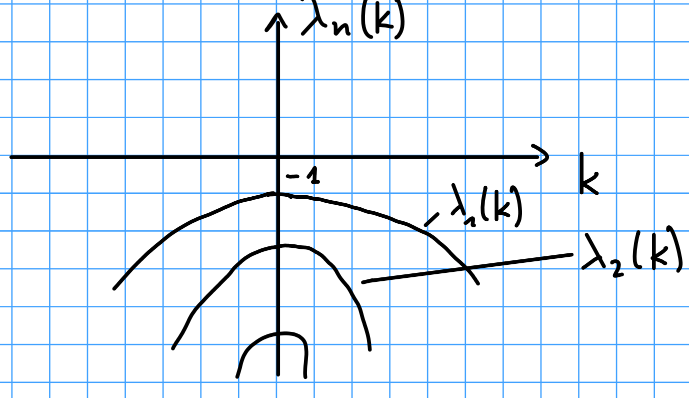
Zahlreiche diffusive Systeme [der Linearteil zeigt diffusives Verhalten] wie z.B. Reaktions-Diffusions-Systeme (z.B. der Brusselator), Konvektionssysteme (z.B. Rayleigh-Bénard-Konvektion [Navier-Stokes + Temperatur]) oder diffusive hydromechanische Gleichungen (z.B. Taylor-Couette-Problem) zeigen das folgende universelle Verhalten. Aufgrund der Energiedissipation existiert ein triviales Grundzustand, z.B. eine triviale stationäre Lösung. Dieser Grundzustand ist stabil, solange der Wert eines bestimmten Systemparameters unterhalb eines kritischen Wertes liegt. Überschreitet er jedoch den kritischen Wert, dann verliert der Grundzustand seine Stabilität und kompliziertere Lösungen treten auf, welche aus der trivialen Lösung heraus bifurkieren. Um die Evolution der Amplitude von langsamen Zeit- und Ortsmodulationen des zugrunde liegenden bifurkierenden Musters zu beschreiben, können mittels Multiskalenanalysis sogenannte Modulationsgleichungen hergeleitet werden.

__Bsp.:__ $\partial_t u = \Delta u$

mit $x \in \mathbb{R}$, $y \in (0,\pi)$, $t \geq 0$, $u(x,y,t) \in \mathbb{R}$ und den Randbedingungen $u(x,0,t) = u(x,\pi,t) = 0$. Lösungen sind:

$$u_{k,n}(x,y,t) = e^{ikx} \sin(ny)\, e^{\lambda_n(k)t}$$

mit $\lambda_n(k) = -k^2 - n^2$.

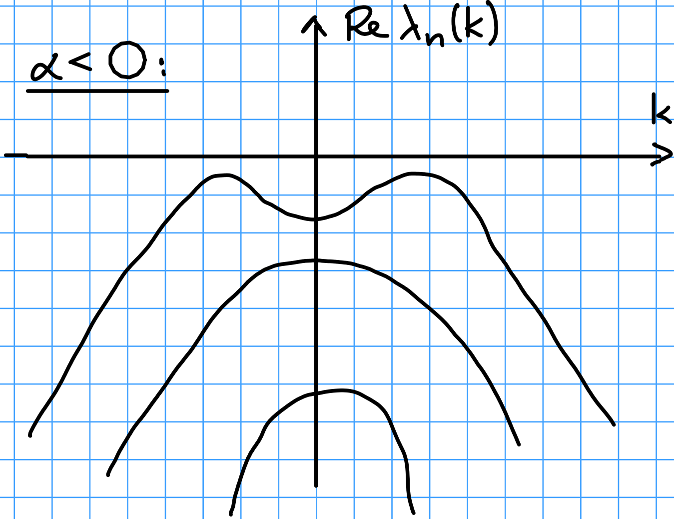


Ein allgemeiner Grundzustand eines diffusiven Systems ist linear stabil, falls für die Lösungen der Linearisierung dieses Systems um den Grundzustand gilt, dass

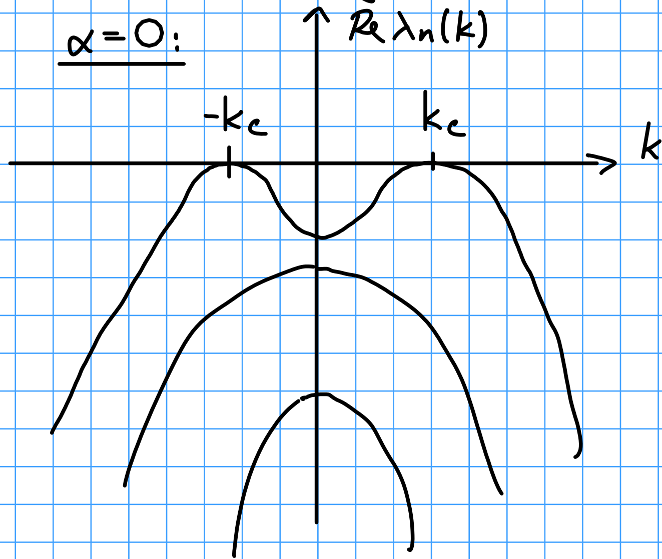
$$\sup_{n\in\mathbb{Z},\, k\in\mathbb{R}} \mathrm{Re}\,\lambda_n(k) < 0.$$

Im Beispiel ist also $u \equiv 0$ ein linear stabiler Grundzustand. Eine Instabilität kommt dann zustande, wenn $k \longmapsto \mathrm{Re}\,\lambda_n(k)$ die k-Achse schneidet. Dies entsteht generischerweise an einer Wellenzahl $k_c \neq 0$. Für reelle Systeme muss dann auch ein Schnitt bei $-k_c$ vorliegen.

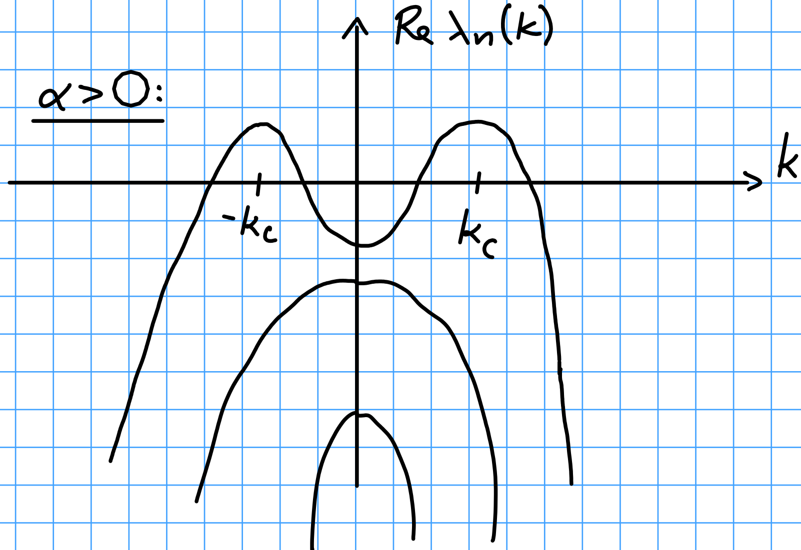
$\alpha < 0$:



$\alpha = 0$:



$\alpha > 0$:



Das einfachste System, das diese Instabilität aufweist, ist die Swift-Hohenberg-Gleichung

$$\partial_t u = -(1+\partial_x^2)^2\, u + \alpha u - u^3$$

mit $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$ und $u(x,t) \in \mathbb{R}$. Der Grundzustand ist gegeben durch $u \equiv 0$.

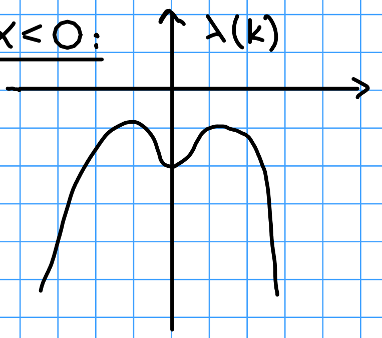
Die Linearisierung um $u \equiv 0$ ist

$$\partial_t v = -(1+\partial_x^2)^2 v + \alpha v$$

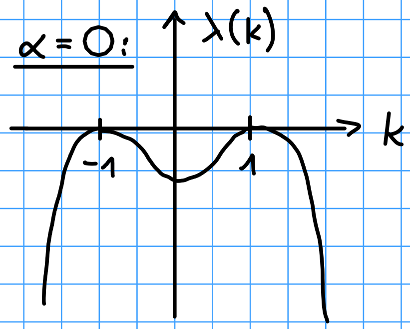
mit Lösungen

$$v(x,t) = e^{ikx} e^{\lambda(k)t}, \quad \lambda(k) = -(1-k^2)^2 + \alpha .$$

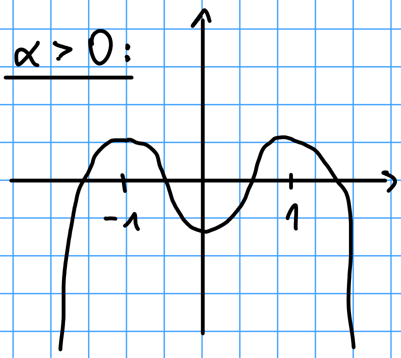
$\alpha < 0$:



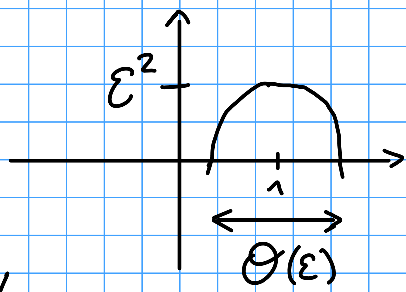
$\alpha = 0$:



$\alpha > 0$:



Wir suchen eine ε-unabhängige Gleichung, die die Dynamik der instabilen Moden $|k| \approx 1$ richtig beschreibt. Sei $\alpha = \varepsilon^2 \ll 1$.



Ansatz im Fourierraum:

$$\hat{u}(k,t) = \varepsilon^\beta \varepsilon^{-1} \hat{A}\left(\frac{k-1}{\varepsilon}, \varepsilon^2 t\right) + h.o.t.$$

$$\Rightarrow \quad u(x,t) = \varepsilon^\beta A(\underbrace{\varepsilon x}_{=:X}, \underbrace{\varepsilon^2 t}_{=:T}) e^{ix} + c.c. + h.o.t.$$

β wird bestimmt durch ein Gleichgewicht der linearen und nichtlinearen Terme. Hier kommt raus: $\beta = 1$. Setze den Ansatz mit $\beta = 1$ in die Swift-Hohenberg (SH)-Gleichung ein:

$$\partial_t u = \varepsilon^3 \partial_T A e^{ix} + c.c. \quad ,$$

$$-(1+\partial_x^2)^2 u = -\partial_x^4 u - 2\partial_x^2 u - u$$

$$= -\varepsilon^5 \partial_X^4 A e^{ix} - 4i\varepsilon^4 \partial_X^3 A e^{ix} + 6\varepsilon^3 \partial_X^2 A e^{ix} + \cancel{4i\varepsilon^2 \partial_X A e^{ix}}$$
$$\cancel{-\varepsilon A e^{ix}} - 2\varepsilon^3 \partial_X^2 A e^{ix} \cancel{- 4i\varepsilon^2 \partial_X A e^{ix}} \cancel{+ 2\varepsilon A e^{ix}} \cancel{- \varepsilon A e^{ix}} + c.c. \quad ,$$

$$\alpha u = \varepsilon^3 A e^{ix} + c.c. \quad ,$$

$$-u|u|^2 = -\varepsilon^3 A^3 e^{3ix} - 3\varepsilon^3 |A|^2 A e^{ix} + c.c. \quad .$$

Balance von $\varepsilon^3 e^{ix}$:

$$\partial_T A = 4\partial_X^2 A + A - 3A|A|^2 .$$

Diese Gleichung heißt (reelle) Ginzburg-Landau-Gleichung [andere Koeffizienten durch Reskalierung möglich].