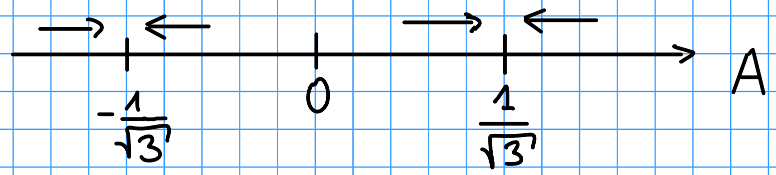
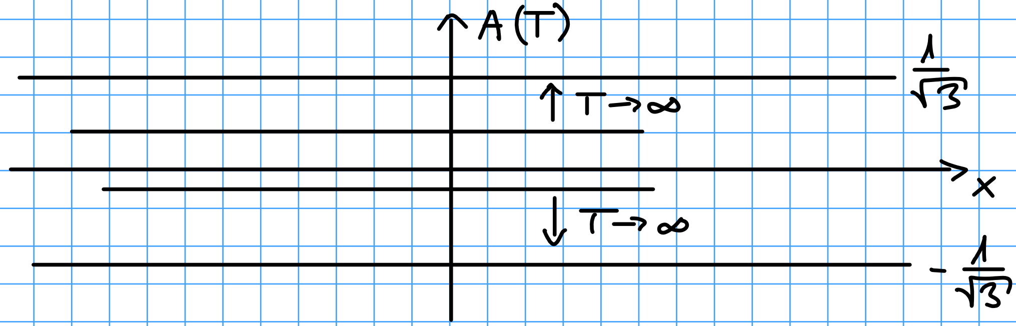
Spezielle Lösungen der GL-Gleichung und deren Dynamik in der SH-Gleichung:

a.) x-unabhängige Lösungen:

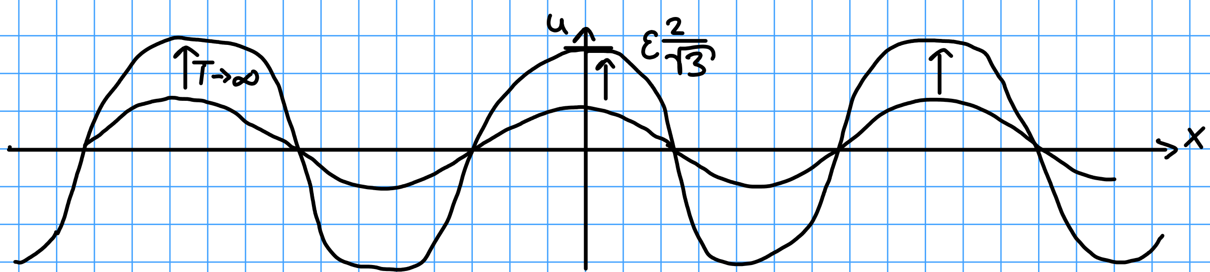
$$\partial_T A = A - 3A|A|^2 = A - 3A^3 \quad \text{für } A \in \mathbb{R}.$$





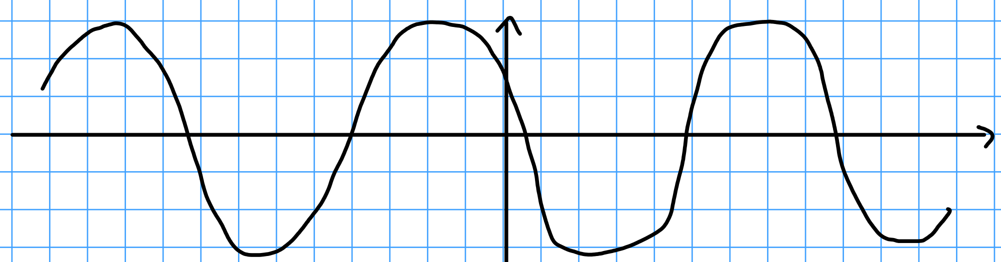
In der SH-Gleichung entspricht dies:

$$u(x,t) = \varepsilon A(\varepsilon^2 t)e^{ix} + \varepsilon A(\varepsilon^2 t)e^{-ix} = 2\varepsilon A(\varepsilon^2 t)\cos(x)$$



Mit jeder Lösung $A = A(T)$ der GL-Gleichung ist auch $A(T)e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$, Lösung der GL-Gleichung. In der SH-Gleichung ergibt sich:

$$u(x,t) = \varepsilon A(\varepsilon^2 t)e^{i\theta}e^{ix} + \varepsilon A(\varepsilon^2 t)e^{-i\theta}e^{-ix} = 2\varepsilon A(\varepsilon^2 t)\cos(x+\theta).$$

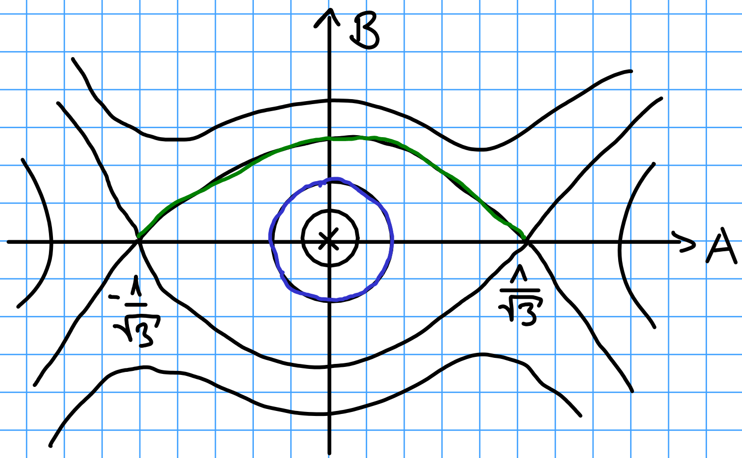


[Phasenverschiebung]

b.) t-unabhängige Lösungen:

$$0 = \partial_x^2 A + A - 3A|A|^2 = \partial_x^2 A + A - 3A^3 \quad \text{für } A \in \mathbb{R}$$

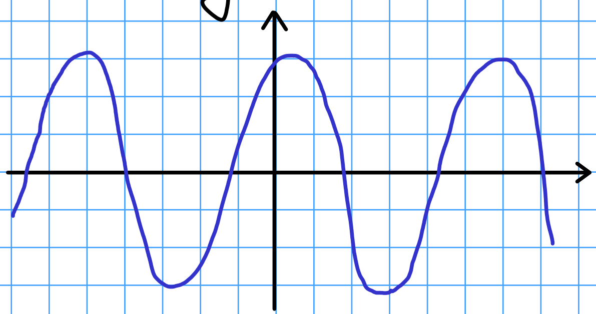
$$\Rightarrow A' = B \,, \quad B' = \frac{1}{4}(-A + 3A^3)$$



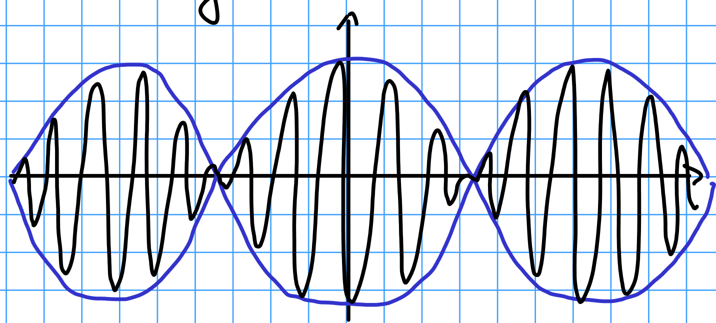
In der SH-Gleichung ergibt sich

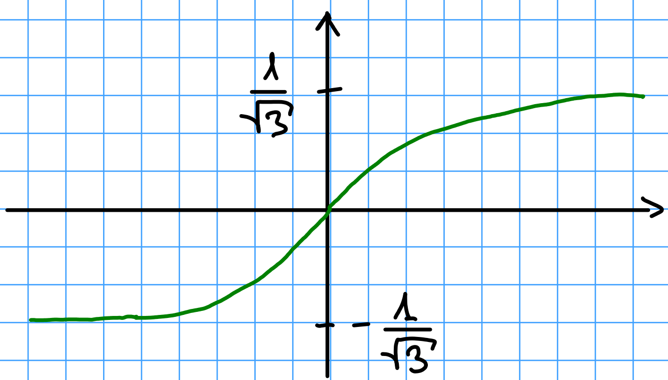
$$u(x,t) = \varepsilon A(\varepsilon x)\, e^{ix} + \varepsilon A(\varepsilon x)\, e^{-ix} = 2\,\varepsilon A(\varepsilon x) \cos(x).$$

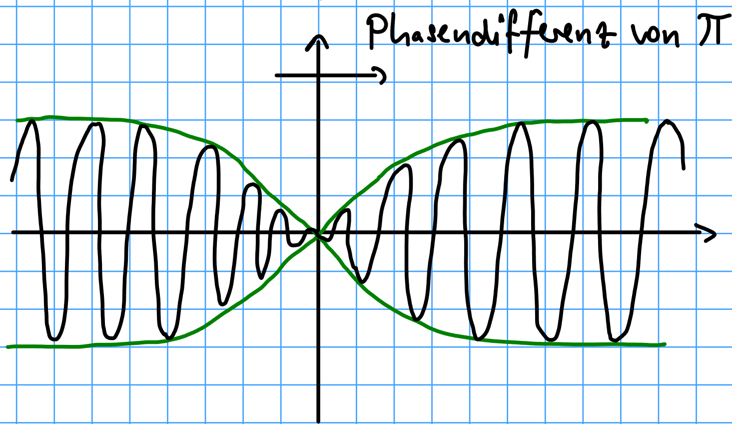
GL-Gleichung:



SH-Gleichung:





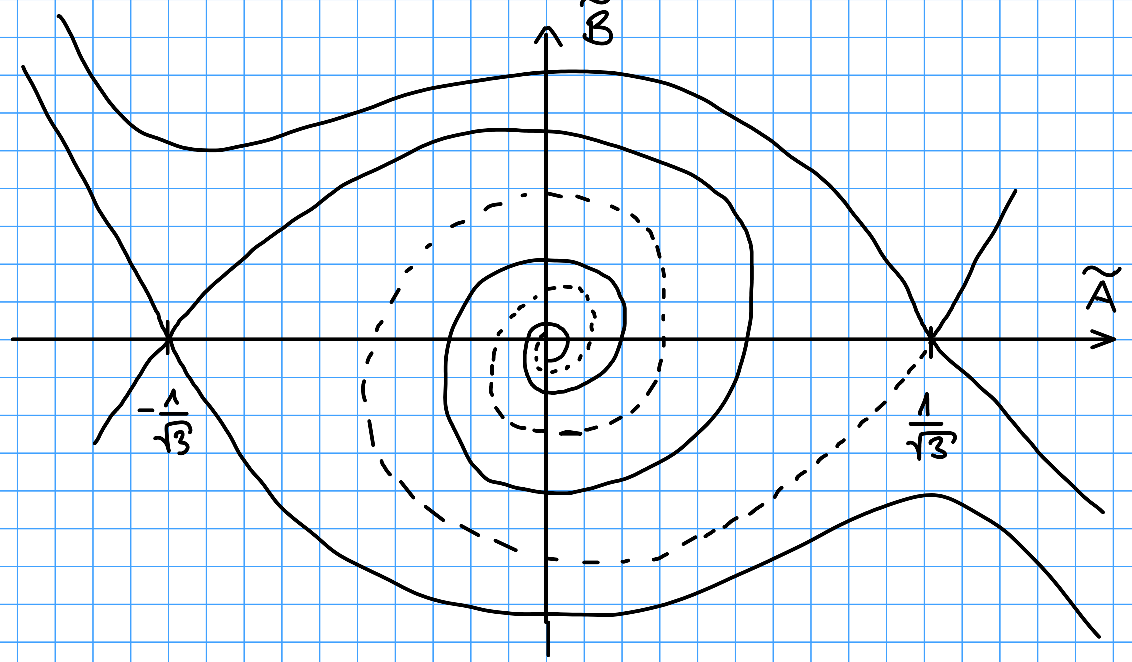


c.) Frontlösungen:

$$A(X,T) = \tilde{A}(\underbrace{X - cT}_{=:\,\xi}) \in \mathbb{R}$$

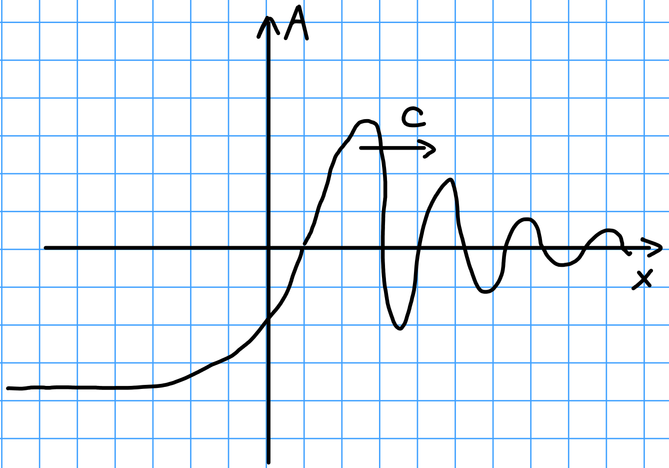
$$\Rightarrow \quad -c\tilde{A}' = 4\tilde{A}'' + \tilde{A} - 3\tilde{A}^3$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{A}' = \tilde{B}, \qquad \tilde{B}' = \frac{1}{4}\left(-c\tilde{B} - \tilde{A} + 3\tilde{A}^3\right)$$

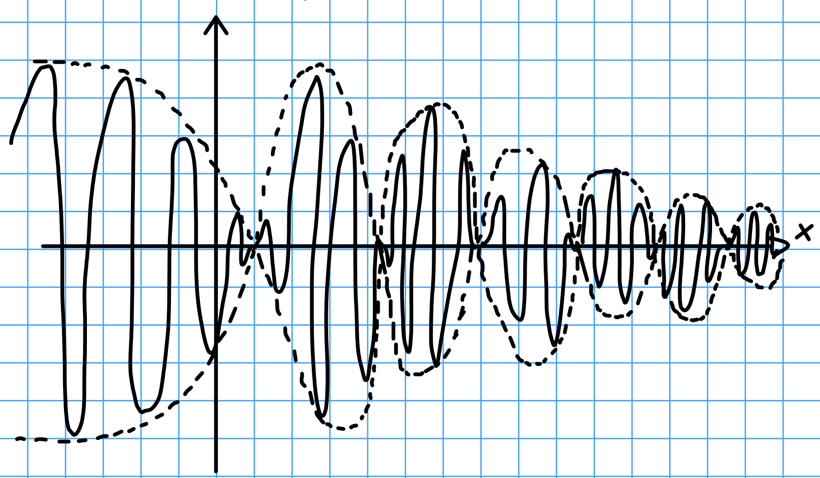


$|c| < c_0 = 4$

GL- Gleichung:



SH- Gleichung:



$$u(x,t) = 2\varepsilon A(X - cT)\cos x$$
$$= 2\varepsilon A(\varepsilon(x - c\varepsilon t))\cos x$$

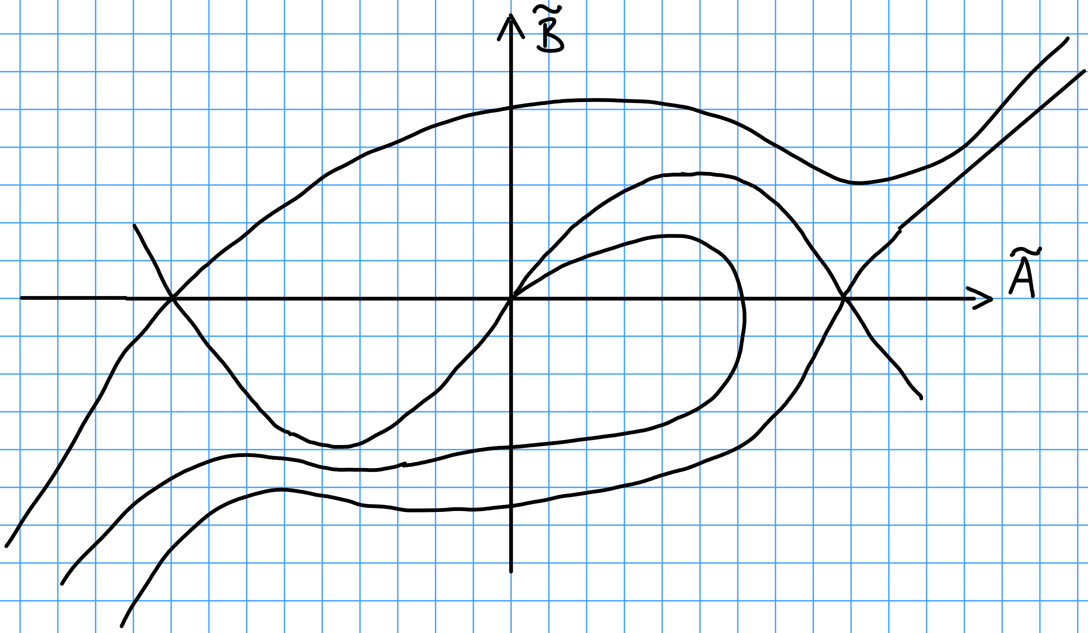
Es gibt ein c_0, für das die Frontlösung A monoton ist, falls $|c| \geq c_0$.

Linearisierung um $(\tilde{A}, \tilde{B}) = (0,0)$:

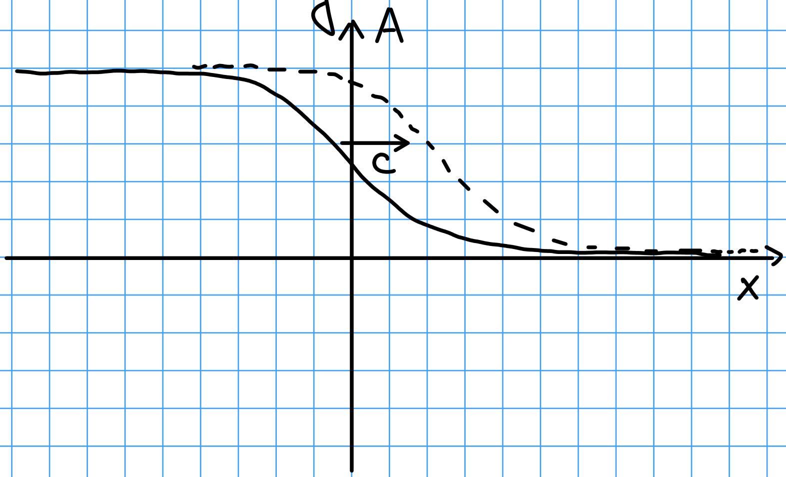
$$\begin{pmatrix} \tilde{A}' \\ \tilde{B}' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{c}{4} \end{pmatrix}}_{=: M} \begin{pmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \end{pmatrix}$$

Eigenwerte von M: $\lambda^2 + \frac{c}{4}\lambda + \frac{1}{4} = 0 \iff \lambda_{1/2} = \frac{-\frac{c}{4} \pm \sqrt{\frac{c^2}{16} - 1}}{2}$

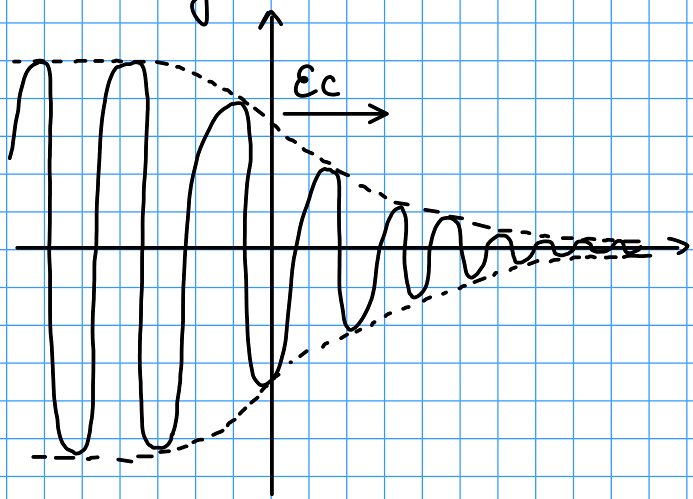
$\Rightarrow \lambda_{1/2} \in \mathbb{R}$, falls $|c| \geq 4 =: c_0$.



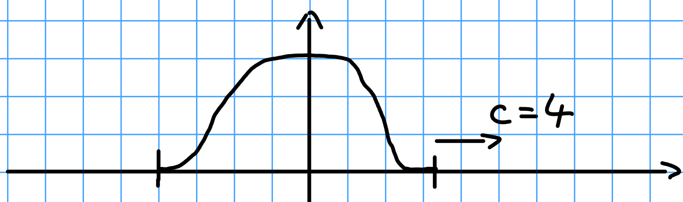
GL-Gleichung:



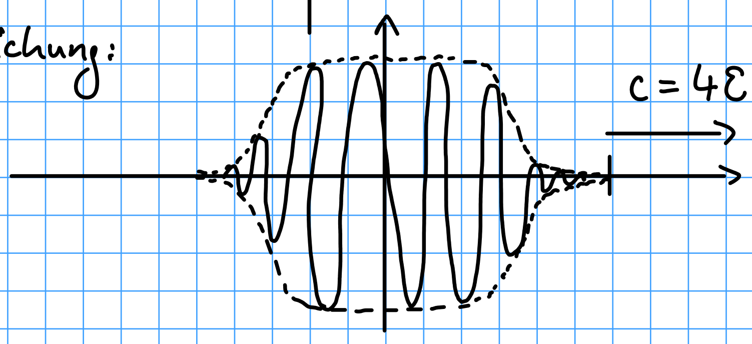
SH-Gleichung:



<u>Bem.:</u> Die Träger von reellen Lösungen der GL-Gleichung mit kompakten Anfangsdaten breiten sich mit der Geschwindigkeit $c = 4$ aus.



SH-Gleichung:



Rechtfertigung der GL-Approximation

Theorem 4.1:
Es existiert ein $s_A \geq 0$, so dass gilt: Sei $A \in C([0,T_0], H^{s_A}(\mathbb{R},\mathbb{C}))$ eine Lösung der Ginzburg-Landau-Gleichung. Dann gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$ und ein $C > 0$, so dass für alle $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ Lösungen der Swift-Hohenberg-Gleichungen existieren mit

$$\sup_{t \in [0,T_0/\varepsilon^2]} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| u(x,t) - (\varepsilon A(\varepsilon x, \varepsilon^2 t) e^{ix} + c.c.) \right| \leq C \varepsilon^{3/2}.$$

Beweis:

1.) Modifiziere die Approximation, so dass

$$\| Res(\varepsilon\psi) \|_{H^1} \leq \mathcal{O}(\varepsilon^{7/2}).$$

Modifizierter Ansatz:

$$\varepsilon\psi(x,t) = \varepsilon A(\varepsilon x, \varepsilon^2 t) e^{ix} + c.c. + \varepsilon^3 A_3(\varepsilon x, \varepsilon^2 t) e^{3ix} + c.c.\,,$$

$$Res(\varepsilon\psi) = -\partial_t(\varepsilon\psi) - (1+\partial_x^2)(\varepsilon\psi) + \varepsilon^2(\varepsilon\psi) - (\varepsilon\psi)^3$$

$$= \varepsilon^3\left(-A^3 e^{3ix} - \underbrace{64}_{=\lambda(3)} A_3 e^{3ix}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^4).$$

Wähle $A_3 = -\frac{1}{64} A^3$.

$$\Rightarrow Res(\varepsilon\psi) = \mathcal{O}(\varepsilon^4) \qquad \text{(formal)}$$

Analog zur NLS-Approximation:

$$\Rightarrow \forall s_A \geq 5: \sup_{t \in [0,T_0/\varepsilon^2]} \| Res(\varepsilon\psi)(t) \|_{H_x^1} \leq C\varepsilon^{7/2}.$$

2.) Sei $u = \varepsilon\psi + \varepsilon^{\beta} R$ mit $\beta = 3/2$.

$$\Rightarrow \partial_t R = -(1+\partial_x^2)^2 R + \varepsilon^2 R - 3\varepsilon^2 \psi^2 R - 3\varepsilon^{5/2}\psi R^2 - \varepsilon^3 R^3 - \varepsilon^{-3/2} \mathrm{Res}(\varepsilon\psi),$$

$R(t=0) = 0.$ (wir fordern $u(t=0) = \varepsilon\psi(t=0)$) [müsste man nicht fordern, könnte auch „klein" genug gewählt werden]

$$\Rightarrow R(t) = \int_0^t S(t-\tau)\Big(\varepsilon^2 R(\tau) - 3\varepsilon^2\psi^2 R(\tau) - 3\varepsilon^{5/2}\psi R^2(\tau) - \varepsilon^3 R^3(\tau) + \varepsilon^{-3/2}\mathrm{Res}(\varepsilon\psi)(\tau)\Big)\, d\tau,$$

wobei

$$\widehat{S(t)u}\,(k) = e^{-(1-k^2)^2 t}\,\hat{u}(k).$$