

$$R(t) = \int_0^t S(t-\tau) \left(\varepsilon^2 R(\tau) - 3\varepsilon^2 \psi^2 R(\tau) - 3\varepsilon^{5/2} \psi R^2(\tau) - \varepsilon^3 R^3(\tau) + \varepsilon^{-3/2} \operatorname{Res}(\varepsilon\psi)(\tau) \right) d\tau,$$

$$\widehat{S(t)u}(k) = e^{-(1-k^2)^2 t} \widehat{u}(k).$$

Es gilt:

$$\|S(t)u\|_{H^1} \leq C \|\widehat{S(t)u}\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

$$= C \left(\int |e^{-(1-k^2)^2 t} \widehat{u}(k)|^2 (1+k^2) dk \right)^{1/2}$$

$$\leq C \left(\int |\widehat{u}(k)|^2 (1+k^2) dk \right)^{1/2} = C \|\widehat{u}\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C \|u\|_{H^1}.$$

$$\Rightarrow \|R(t)\|_{H^1} \leq \int_0^t C \left(\varepsilon^2 \|R(\tau)\|_{H^1} + 3\varepsilon^2 \|\psi\|_{C^1}^2 \|R(\tau)\|_{H^1} + 3\varepsilon^{5/2} \|\psi\|_{C^1} \|R(\tau)\|_{H^1}^2 + \varepsilon^3 \|R(\tau)\|_{H^1}^3 + \varepsilon^{-3/2} \|\operatorname{Res}(\varepsilon\psi)(\tau)\|_{H^1} \right) d\tau$$

$$\leq \int_0^t C \varepsilon^2 (1 + 3C_\psi^2 + 1) \|R(\tau)\|_{H^1} d\tau + \int_0^t C \varepsilon^2 C_{\operatorname{Res}} d\tau,$$

$$\text{falls } 3\varepsilon^{1/2} C_\psi \|R(\tau)\|_{H^1}^2 + \varepsilon \|R(\tau)\|_{H^1}^3 \leq 1.$$

(Wir haben $\|\psi\|_{C^1} = \mathcal{O}(1)$ verwendet, weil $\|\psi\|_{H^1} = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1/2})$ ist.)

Gronwall liefert:

$$\begin{aligned} \|R(t)\|_{H^1} &\leq T_0 C C_{\operatorname{Res}} e^{C \varepsilon^2 (1 + 3C_\psi^2 + 1)t} \\ &\leq T_0 C C_{\operatorname{Res}} e^{C(2 + 3C_\psi^2)T_0} =: M \end{aligned}$$

für alle $t \leq T_0 \varepsilon^{-2}$.

Wähle $\varepsilon_0 > 0$ so klein, dass

$$3 \varepsilon_0^{1/2} C_\psi M^2 + \varepsilon_0 M^3 \leq 1,$$

wobei $C_\psi = \sup_{t \in [0, T_0 \varepsilon^{-2}]} \|\psi(t)\|_{C^1}$.

$$\sup_{t \in [0, T_0 \varepsilon^{-2}]} \|R(t)\|_{C^0} \leq C \cdot \sup_{t \in [0, T_0 \varepsilon^{-2}]} \|R(t)\|_{H^1} = \mathcal{O}(1).$$

Bemerkung: $A \in H^s(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ schließt konstante Funktionen und Fronten aus.

Um diese auch zuzulassen, könnte man $A \in C_{b, \text{unif}}^s(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ oder $A \in C^{s,d}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ wählen.

Schwierigkeit: Abschätzung für $S(t)$ in $C_{b, \text{unif}}^0$. Kern muss explizit ausgerechnet werden. Abschätzen ist

$$\int \left| \int e^{-(1-k^2)^2 t} e^{-ikx} dk \right| dx \quad (\text{schwierig}).$$

Alternative: Verwende $H_{\ell, u}^m$ mit \leftarrow [locally uniform]

$$\|u\|_{H_{\ell, u}^m} = \sum_{j=0}^m \|\partial_x^j u\|_{L_{\ell, u}^2},$$

$$\|u\|_{L_{\ell, u}^2} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} |u(y)|^2 dy \right)^{1/2}.$$

$H_{\ell, u}^m$ enthält konstante Funktionen und Fronten.

$$H_{\ell, u}^m := \left\{ u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid \|u\|_{H_{\ell, u}^m} < \infty \wedge \lim_{y \rightarrow 0} \|u(\cdot - y) - u(\cdot)\|_{H_{\ell, u}^m} = 0 \right\}.$$

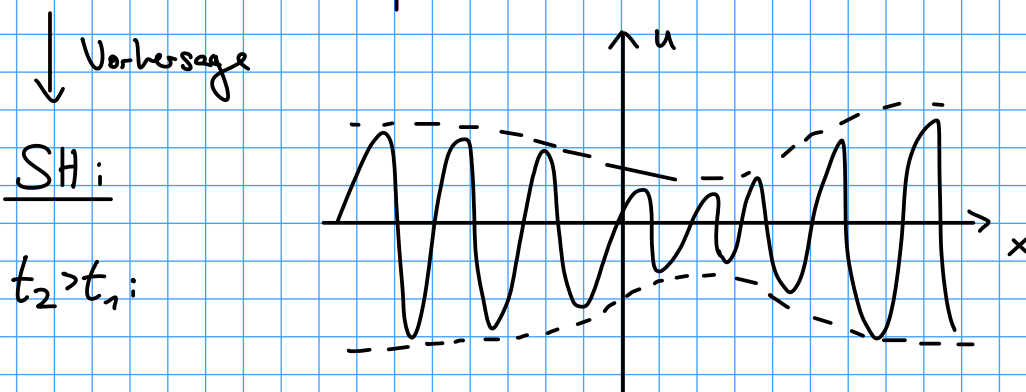
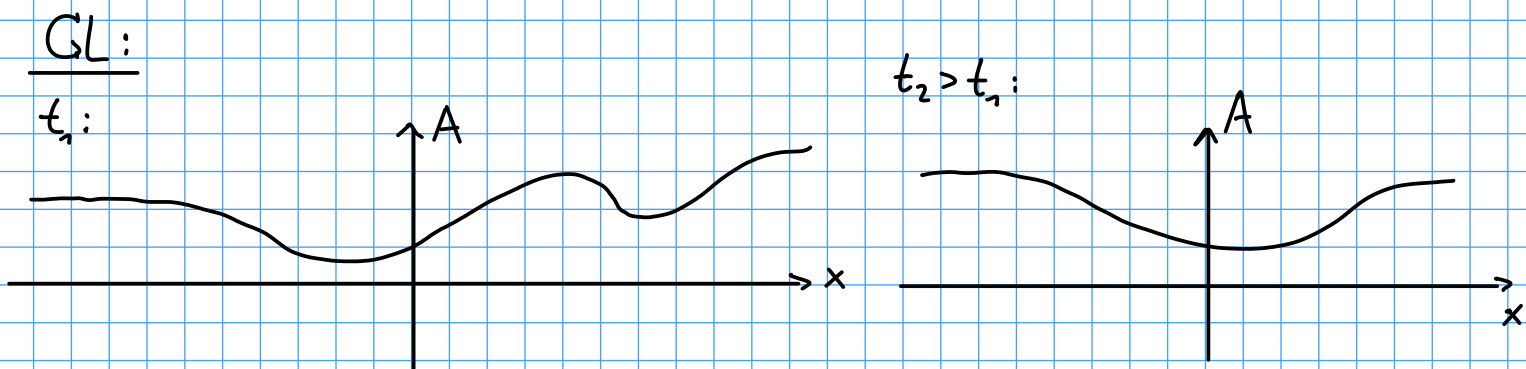
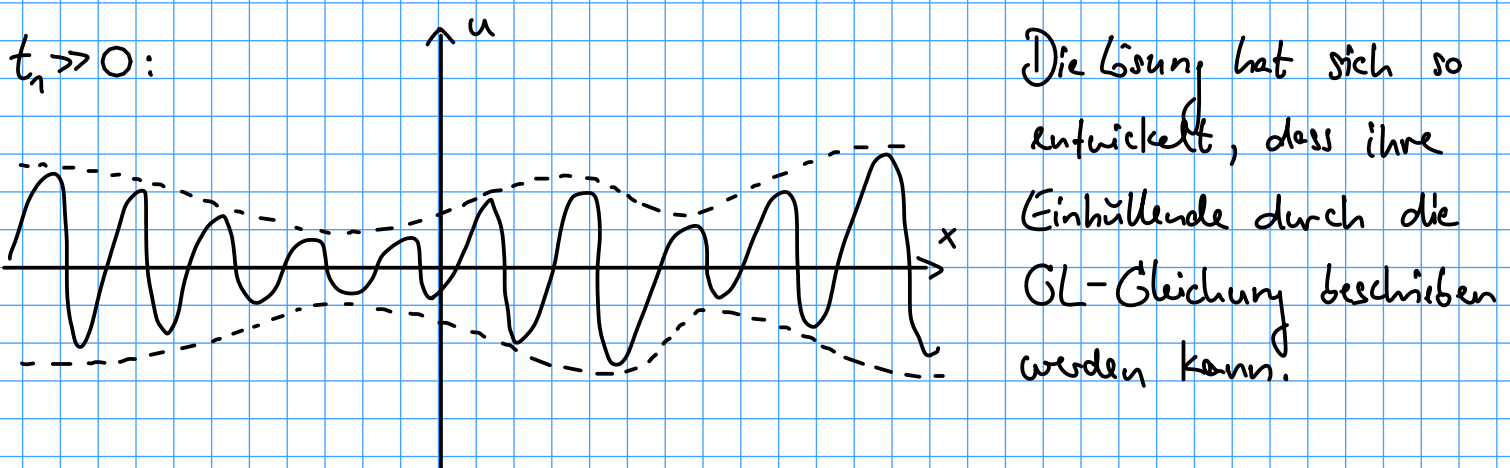
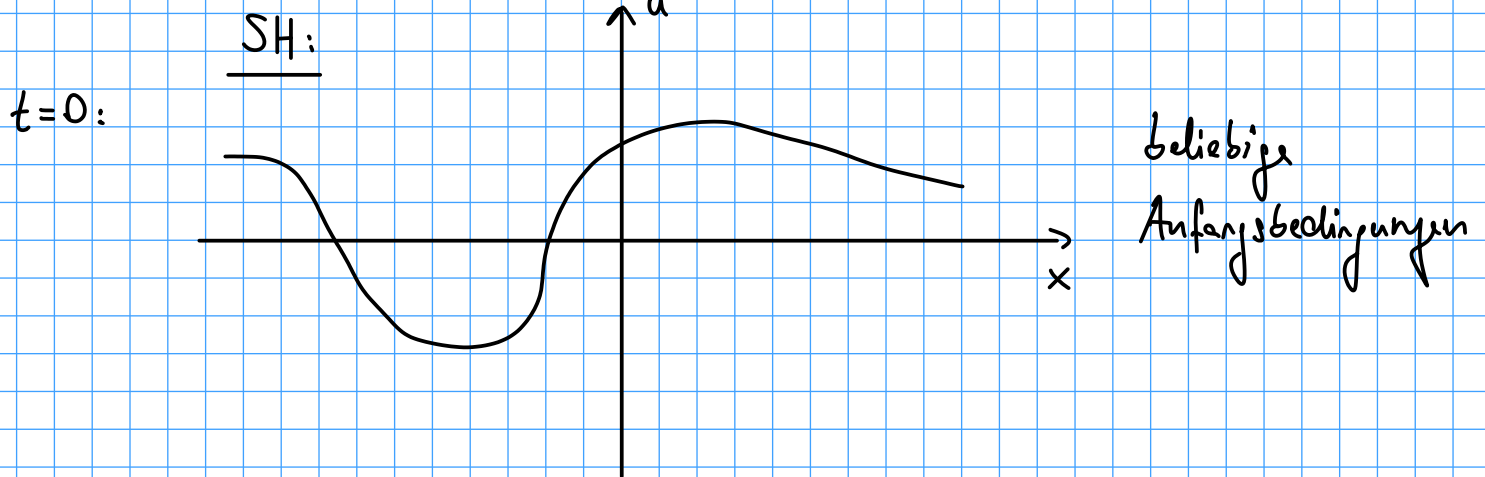
Die letzte Bedingung entspricht dem unif. in $C_{b, \text{unif}}^0$.

Es gilt: Sei Mu definiert durch $\hat{M}(k) \hat{u}(k)$. Dann ist

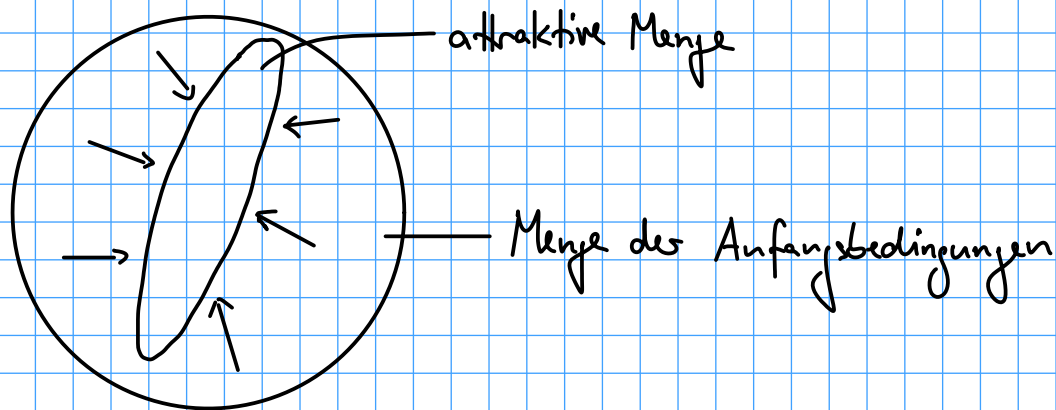
$$\|Mu\|_{H_{\ell, u}^m} \leq \|\hat{M}\|_{C_b^2} \|u\|_{H_{\ell, u}^m}.$$

Damit können Halbgruppen wie in H^m abgeschätzt werden.

Aufgrund der Diffusivität kann erwartet werden, dass eine attraktive Menge existiert, die alle entstehenden Muster enthält und die durch die GL-Gleichung beschrieben werden kann. [Grund: siehe Dyn. Systeme, Beschreibung durch Gradientensysteme.]

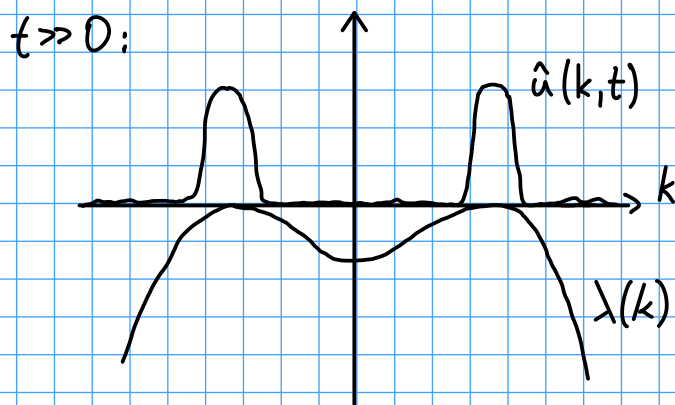
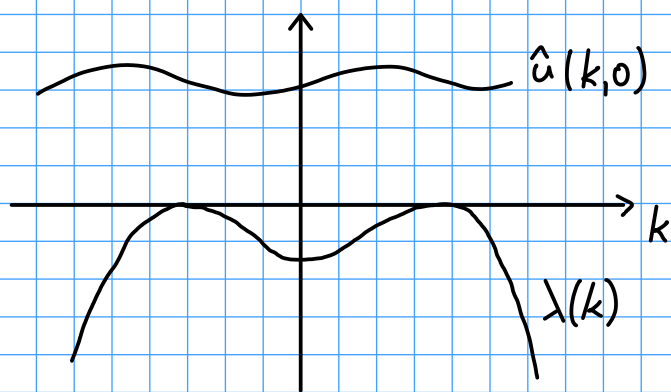


Im Phasenraum $H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der SH-Gleichung:



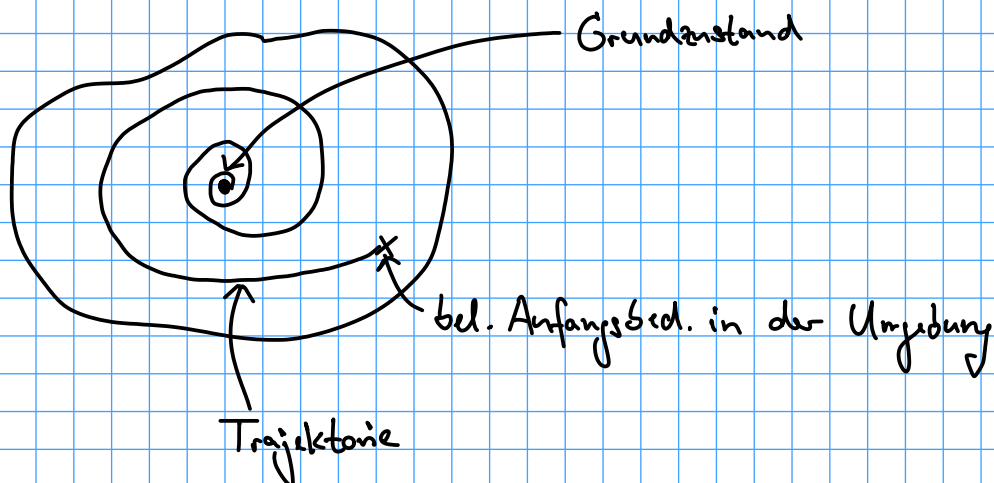
Idee: Betrachte die Fouriers Transformation der Lösungen des linearen Problems

$$\hat{u}(k, t) = e^{-(1-k^2)^2 t} \hat{u}(k, 0).$$

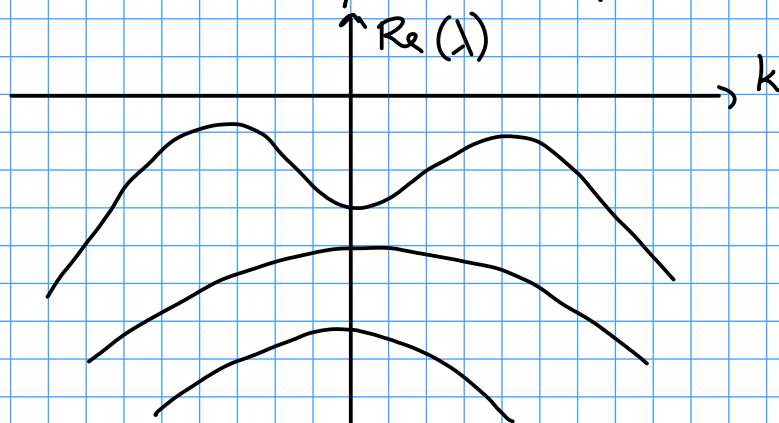


Ist der Grundzustand stabil, dann ist es im Allgemeinen auch attraktiv, d.h. es gibt eine Umgebung des Grundzustandes, in der die Lösungen zu den Anfangsbedingungen in dieser Umgebung gegen den Grundzustand konvergieren.

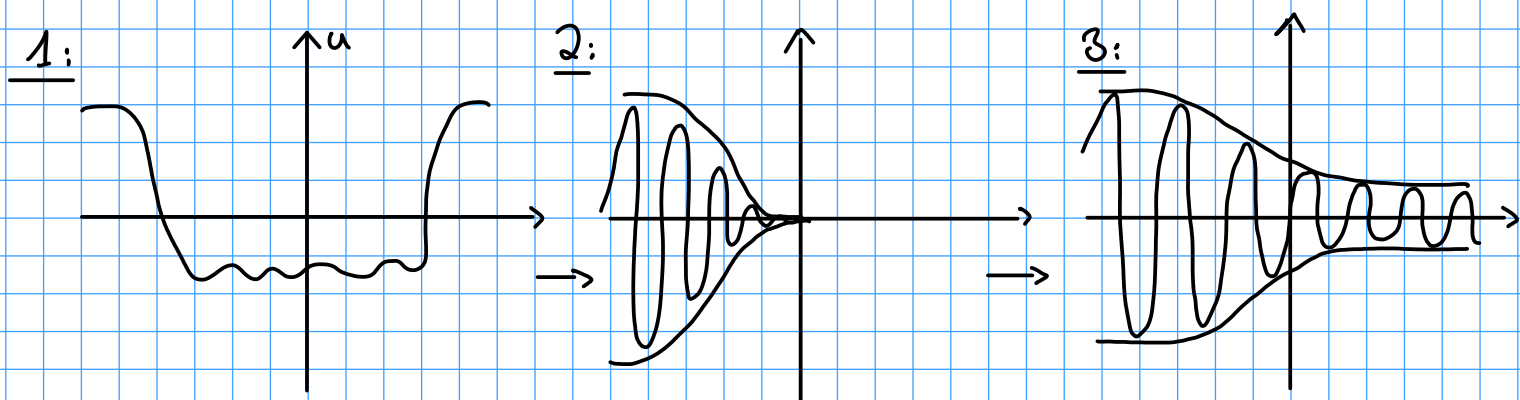
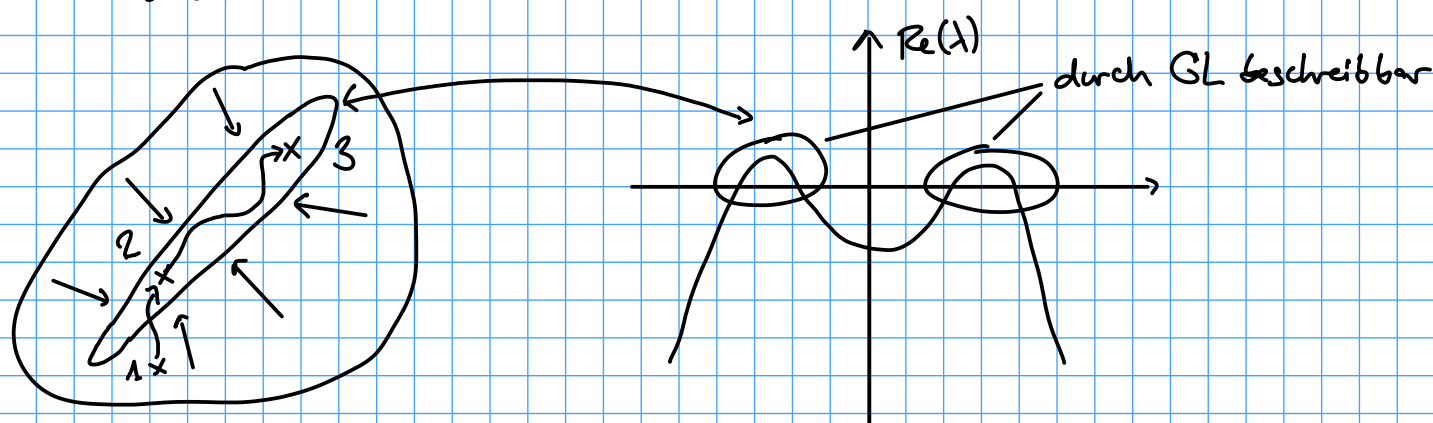
Phasenraum:



Eigenwertkurven der Linearisierung einer Störung des Grundzustandes in einem unendlich-dimensionalen dynamischen System im Fourierraum:



Wird der Grundzustand der SH-Gleichung instabil, so kann für Parameterwerte nahe der Instabilität erwartet werden, dass eine Umgebung existiert, in der die Lösungen durch die GL-Gleichung beschrieben werden können und dass eine Umgebung des Grundzustandes existiert, die in die GL-Gleichung absorbiert wird.



Theorem 4.2:

Für alle $m \in \mathbb{N}$ gibt es ein $T_1 > 0$, $\varepsilon_0 > 0$, $C_m > 0$, so dass für alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ die Lösung der Swift-Hohenberg-Gleichung zum Zeitpunkt $t = T_1 / \varepsilon^2$

eine Darstellung der Form

$$u(x, \frac{T_1}{\varepsilon^2}) = \varepsilon A_1(\varepsilon x) e^{ix} + \text{c.c.} + \varepsilon^{3/2} R(x)$$

Besitzt, wobei $\|A_1\|_{H^m} \leq C_m$, $\|R\|_{H^1} \leq C_m$ gilt und die Konstanten T_1, ε_0, C_m nur von C_0 abhängen, falls

$$\|u(\cdot, 0)\|_{H^1} \leq C_0 \varepsilon^{1/2}$$

und

$$\|\hat{u}(\cdot, 0)\|_{L^2} \leq C_0 \varepsilon$$

für ein $C_0 > 0$ gilt.

Bem.: Das Theorem gilt auch, falls $\|\varepsilon^{3/2} R(\cdot, 0)\|_{H^1} = \mathcal{O}(\varepsilon^{3/2})$ ist.

Bem.: Theoreme 4.1 und 4.2 besagen, dass ab $t = \frac{T_1}{\varepsilon^2}$ die Dynamik der Lösung der SH-Gleichung mit Hilfe der GL-Gleichung vorhergesagt werden kann. Wähle dazu A_1 als Anfangsbedingung der GL-Gleichung und wende Thm. 4.1 an (für $T - T_1 = \mathcal{O}(\varepsilon^{-2})$).