Theorem 4.2. Für alle $m \in \mathbb{N}$ gibt es ein $T_1 > 0$, $\varepsilon_0 > 0$, $C_m > 0$, so dass für alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ die Lösung der SH-Gl. zum Zeitpunkt $t = T_1/\varepsilon^2$ eine Darstellung der Form

$$u\left(x, \frac{T_1}{\varepsilon^2}\right) = \varepsilon A_1(\varepsilon x) e^{ix} + c.c. + \varepsilon^{3/2} R(x)$$

besitzt, wobei $\|A_1\|_{H^m} \leq C_m$, $\|R_1\|_{H^1} \leq C_m$ gilt und die Konstanten T_1, ε_0, C_m nur von C_0 abhängen, falls $\|u(\cdot,0)\|_{H^1} \leq C_0 \varepsilon^{1/2}$ und $\|\hat{u}(\cdot,0)\|_{L^1} \leq C_0 \varepsilon$ für ein $C_0 > 0$ gilt. $\triangle$

Bem.: Das Theorem gilt auch falls $\|\varepsilon^{3/2} R_1(\cdot,0)\|_{H^1} = O(\varepsilon^{3/2})$ ist.

Bem.: Das Theorem 4.1. + 4.2. besagen, dass ab $T = T_1/\varepsilon^2$ die Dynamik der Lösung der SH-Gl. mithilfe der GL-Gl. vorhergesagt werden kann. Wähle dann A_1 als Anfangsbed. der GL-Gl. und wende Thm 4.1. für $T = T_1 = O(\varepsilon^{-2})$ an.

23.6.16

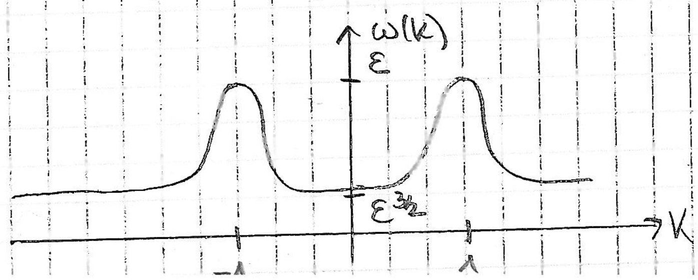
Beweis: Wir wollen erreichen:

$$\hat{u}\left(k, \frac{T_1}{\varepsilon^2}\right) = \varepsilon \varepsilon^{-1} \hat{A}_1\left(\frac{k-1}{\varepsilon}\right) + \varepsilon \varepsilon^{-1} \hat{A}_{-1}\left(\frac{k+1}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^{3/2} \hat{R}(k).$$

Idee: Multipliziere u mit einem Gewicht, das bestraft, (d.h. Ordnungen von ε verliert), falls $\hat{u}$ nicht von dieser Bauart ist.

Wähle Norm $\int_{\mathbb{R}} |\hat{u}(k)| \, \omega(k) \, dk$ mit

$$\omega(k) = \min\left\{ \varepsilon^{-3/2}, \varepsilon^{-1}\left(1 + \left(\frac{k-1}{\varepsilon}\right)^2\right)^{m/2}, \varepsilon^{-1}\left(1 + \left(\frac{k+1}{\varepsilon}\right)^2\right)^{m/2} \right\}$$



Ist $\int |\hat{u}(k)|\, w(k)\, dk = \mathcal{O}(1)$, so ist $\hat{u}|_{t=\frac{T_1}{\varepsilon^2}}$ von der gewünschten Bauart, denn

$$\int_{\mathbb{R}} \left|\varepsilon\varepsilon^{-1}\hat{A}_1\left(\frac{k-1}{\varepsilon}\right)\right| \varepsilon^{-1}\left(1+\left(\frac{k-1}{\varepsilon}\right)^2\right)^{m/2} dk$$

$$\underset{k-1=\varepsilon K}{=} \int |\hat{A}_1(K)|(1+|K|^2)^{m/2}\, dK = \mathcal{O}(1),$$

falls $\hat{A}_1 \in L^1(m)$ (also $A \in C_b^m$).

Wie zeigt man das Auftreten der gewünschten Fouriermoden-verteilung?

Ansatz $\hat{u} = \hat{u}_c + \hat{u}_s$, wobei $\hat{u}_c = \hat{P}_c\hat{u}$, $\hat{u}_s = \hat{P}_s\hat{u}$

mit $\hat{P}_c(k) = \chi_{[-1,1;-0,9]}(k) + \chi_{[0,9;1,1]}(k)$, $\hat{P}_s = 1 - \hat{P}_c$.

$\hat{u}_c$ und $\hat{u}_s$ erfüllen:

$$\hat{u}_{\substack{c\\s}}(k,t) = e^{(-(1-k^2)^2+\varepsilon^2)t}\,\hat{u}_{\substack{c\\s}}(k,0) + \int_0^t e^{(-(1-k^2)^2+\varepsilon^2)(t-\tau)}\hat{P}_{\substack{c\\s}}(\hat{u}^{*3})(k,\tau)\, d\tau.$$

Setze $\hat{u}_{\substack{c\\s}} = \varepsilon\hat{v}_{\substack{c\\s}}$.

$$\Rightarrow \hat{v}_{\substack{c\\s}}(k,t) = e^{(-(1-k^2)^2+\varepsilon^2)t}\,\hat{v}_{\substack{c\\s}}(k,0) + \varepsilon^2\int_0^t e^{(-(1-k^2)^2+\varepsilon^2)(t-\tau)}\hat{P}_{\substack{c\\s}}(\hat{v}^{*3})(k,\tau)\, d\tau$$

$\Rightarrow$ Lokale Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

$\hat{v}_c, \hat{v}_s \in C^0([0, 1/\varepsilon], L^1)$ mit

$$\sup_{t\in[0,1/\varepsilon]} \|\hat{v}_{\substack{c\\s}}\|_{L^1} = \mathcal{O}(1).$$

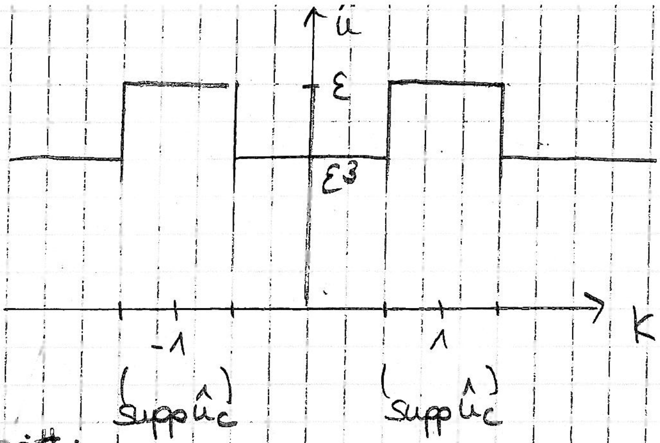
Es ist

$$\|\hat{v}_c|_{t=1/\varepsilon}\|_{L^1} \leq e^{\varepsilon^2 t}\|\hat{v}_c|_{t=0}\|_{L^1} + C\varepsilon^2\cdot\frac{1}{\varepsilon},$$

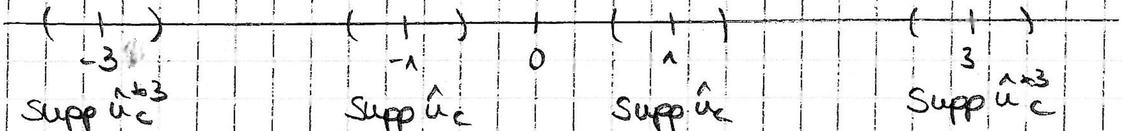
$$\|\hat{v}_s|_{t=1/\varepsilon}\|_{L^1} \leq e^{-\sigma/\varepsilon}\|\hat{v}_s|_{t=0}\|_{L^1} + C\varepsilon^2\int_0^{1/\varepsilon} e^{-\sigma(t-\tau)}\, d\tau$$

$$\leq \tilde{C}\varepsilon^2,$$

für ein $\sigma > 0$ mit $e^{-\sigma\cdot 1/\varepsilon} \ll \varepsilon^2$ für $\varepsilon \to 0$.



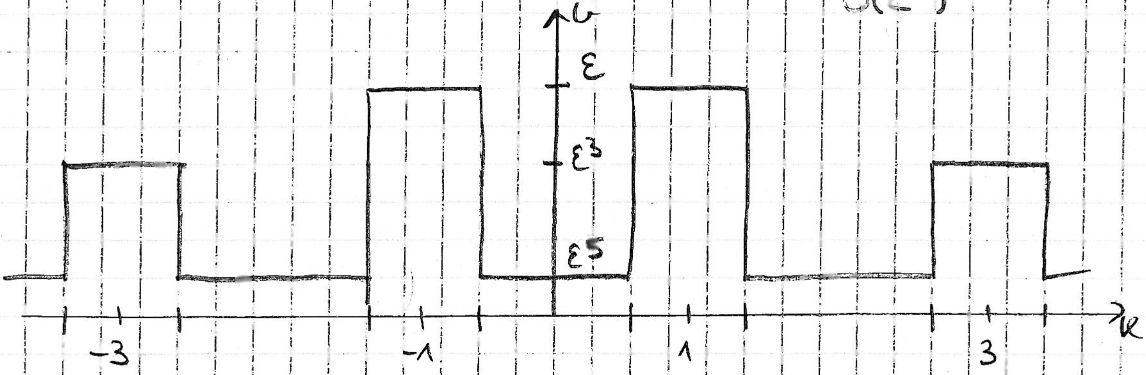
Nächster Schritt:



Zerlege $\hat u = \varepsilon \hat v_c + \varepsilon^3 \hat v_3 + \varepsilon^3 \hat v_r$

$\Rightarrow$ Mithilfe Variation der Konstanten-Formel erhalten wir lokale Ex. & Eind. für $\hat v_3, \hat v_r$

$$\|\hat v_r|_{t=1/\varepsilon^2}\|_{L^1} \le \underbrace{e^{-(\cdot)t}}_{\to 0}\hat v_r|_{t=0} + \underbrace{\varepsilon^2 \int e^{-(\cdot)(t-\tau)} \hat p_r(\cdot)\, d\tau}_{O(\varepsilon^2)}$$

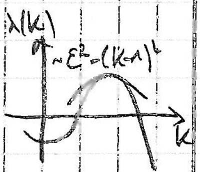


Nächster Schritt: Nachweis der Skalierung $A(\varepsilon x)$.

lineares Problem:

$$\int_{\mathbb R} \chi_{k>0}\, \hat v_c(k,t) \left(1+\left(\frac{k-1}{\varepsilon}\right)^2\right)^{m/2} dk$$

$$= \int \chi_{k>0}\, e^{(-(1-k^2)^2+\varepsilon^2)t}\, \hat v_c(k,0) \left(1+\left(\frac{k-1}{\varepsilon}\right)^2\right)^{m/2} dk$$



$$\le \int_0^\infty e^{\varepsilon^2 t} e^{-(k-1)^2 t}\, |\hat v_c(k,0)| \left(1+\left(\frac{k-1}{\varepsilon}\right)^2\right)^{m/2} dk$$

$$\le e^{\varepsilon^2 t} \sup_k \left| e^{-(k-1)^2 t} \left(1+\left(\frac{k-1}{\varepsilon}\right)^2\right)^{m/2} \right| \int_{\mathbb R} |\hat v_c(k,0)|\, dk$$

$$\underset{k-1=\varepsilon K}{\le} e^{\varepsilon^2 t} \sup_{K} \left| e^{-\varepsilon^2 K^2 t} (1+K^2)^{m_2} \right| \, \|\hat{v}_L|_{t=0}\|_{L^1}$$

$$= e^{\varepsilon^2 t} \sup_{s} \left| e^{-s^2} \left(1+\frac{s^2}{\varepsilon^2 t}\right)^{m_2} \right| \, \|\hat{v}_L|_{t=0}\|_{L^1}$$

$$\le e^{T_1} C \max\{1, T_1^{-m_2} \underbrace{\|\hat{v}_L|_{t=0}\|_{L^1}}_{=\mathcal{O}(1)}\}$$

$$= \mathcal{O}(1);$$

mit analoger Argumentation zeigt man die Skalierung auch für das nichtlineare Problem.

Fouriermodenverteilung und Skalierung liefern die Beh. $\square$

Ginzburg-Landau-Muster in der Swift-Hohenberg-Gl.:

Wir haben: $A = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ist Lösung der GL-Gl. Nach Thm 4.1. wissen wir: Es gibt eine Lösung u der SH-Gl. mit

$$u(x,t) = \frac{2\varepsilon}{\sqrt{3}} \cos(x) + \mathcal{O}(\varepsilon^{3/2})$$

möglich zeitabh

für $t = \mathcal{O}(\varepsilon^{-2})$.

Für dieses GL-Muster kann man noch mehr aussagen:

<u>Theorem 4.3.</u> Es gibt ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass die SH-Gl. für alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ 2π-periodische, stationäre Lösungen der Form

$$u_{per}(x) = \frac{2\varepsilon}{\sqrt{3}} \cos x + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

mit $u_{per} \in H^1_{per}(0, 2\pi)$ besitzt. ×