

Beweisstrategie:

Verwendung des Zentrumsmannigfaltigkeitensatzes.

Einschub Zentrumsmannigfaltigkeit:

Betrachte im \mathbb{R}^n :

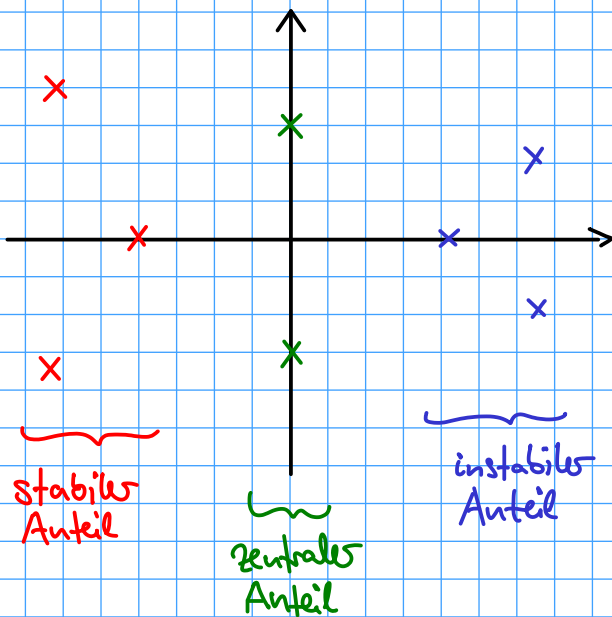
$$\dot{u} = Au + g(u) \quad \text{mit } A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

mit konstanten Koeffizienten, $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ hinreichend glatt und

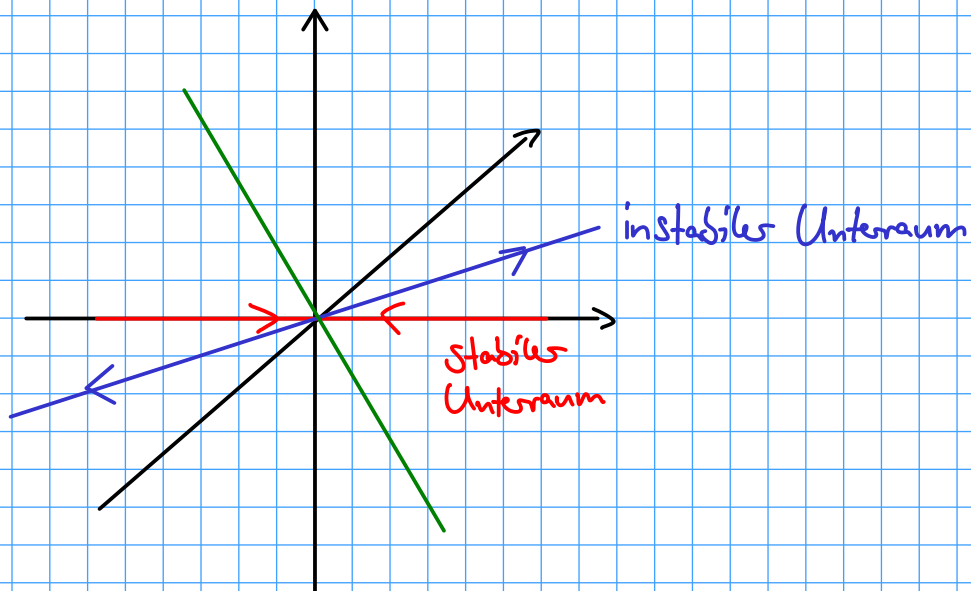
$g(u) = \mathcal{O}(\|u\|^2)$ für $u \rightarrow 0$. Linearisierung um $u \equiv 0$:

$$\dot{u} = Au.$$

Betrachte das Spektrum $\sigma(A)$:



Eigenräume:



Schreibe u als Summe der Projektionen von u auf die jeweiligen Eigenräume

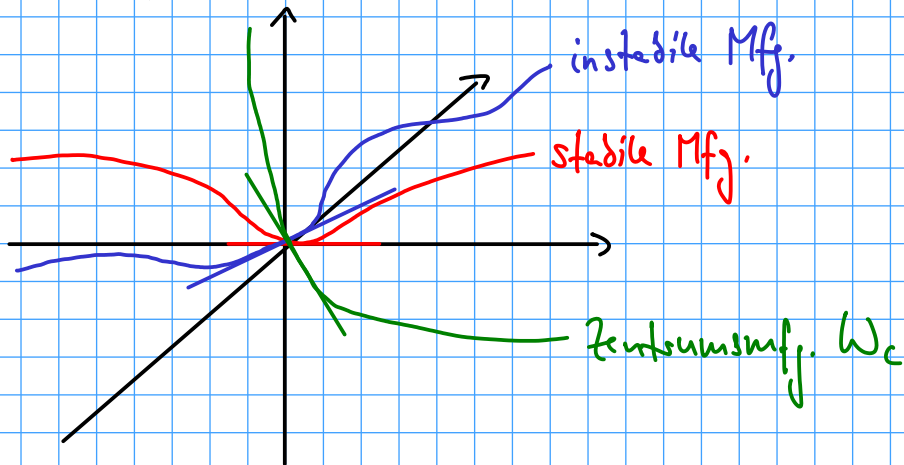
$$u = u_s + u_c + u_i$$

Für $t \rightarrow \infty$: $u_s \rightarrow 0$,

für $t \rightarrow -\infty$: $u_i \rightarrow 0$.

Für $t \in \mathbb{R}$ ist u_c beschränkt, falls kein Jordanblock vorliegt, und im Falle von Jordanblöcken hat es maximal polynomiales Wachstum.

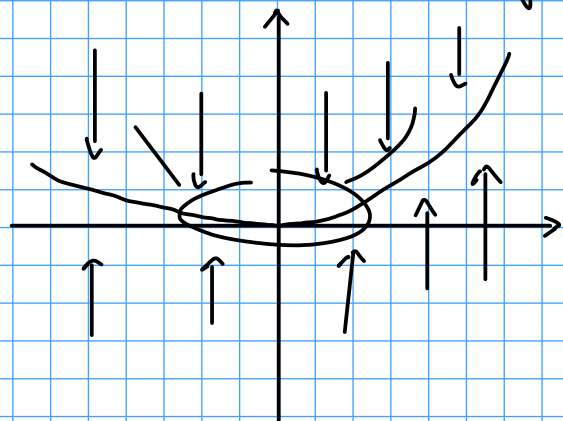
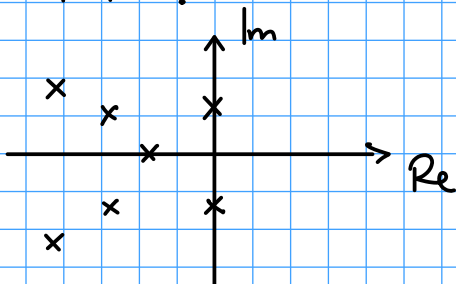
Im nichtlinearen Fall werden die Unterräume zu Untermannigfaltigkeiten, die tangential zu den entsprechenden Unterräumen sind.



W_c ist invariant unter dem Fluss der Dgl., d.h.

$$u|_{t=0} \in W_c \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}: u(t) \in W_c.$$

Ist keine instabile Mfg. vorhanden, dann ist die Zentrumsmanigfaltigkeit sogar attraktiv.



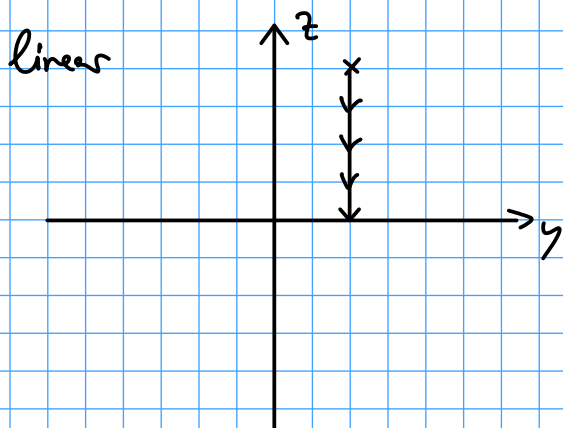
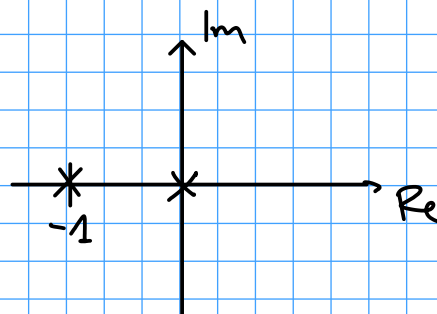
Die interessante Dynamik findet auf der Zentrumsmanif. statt.

Beispiel:

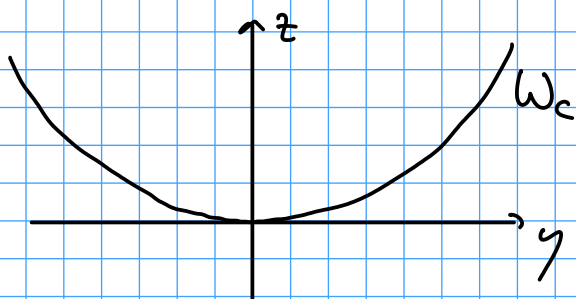
$$\begin{aligned}\dot{y} &= 0y + zy \\ \dot{z} &= -z + y^2\end{aligned}$$

Linearisierung:

$$\begin{aligned}\dot{y} &= 0y \quad \leftarrow \text{zentral} \\ \dot{z} &= -z \quad \leftarrow \text{stabil}\end{aligned}$$



nichtlinear: Zentrumsmannigfaltigkeit $z = h(y) = 0y + c_2 y^2 + c_3 y^3 + \dots$



da tangential zu
zentralem Unterraum

Einsetzen von $z = h(y)$ in $\dot{z} = \dots$ liefert

$$2c_2 y \dot{y} + 3c_3 y^2 \dot{y} + \dots = -c_2 y^2 - c_3 y^3 - \dots + y^2.$$

Außerdem gilt:

$$\dot{y} = z y = y(c_2 y^2 + \dots) = \mathcal{O}(y^3).$$

Einsetzen in die obige Gleichung und Koeffizientenvergleich bei y^2 liefert

$$c_2 = 1,$$

also $z = h(y) = y^2 + \mathcal{O}(y^3).$

Einsetzen in $\dot{y} = \dots$ liefert

$$\dot{y} = y^3 + \mathcal{O}(y^4)$$

auf der Zentrumsmf. $(y, h(y))$.

Im unendlich dimensionalen Fall der SH-Gl.

$$\partial_t u = - (1 + \partial_x^2)^2 u + \varepsilon^2 u - u^3$$

lässt sich dieses Konzept folgendermaßen verallgemeinern:

Wir suchen 2π -periodische Lösungen. Ansatz:

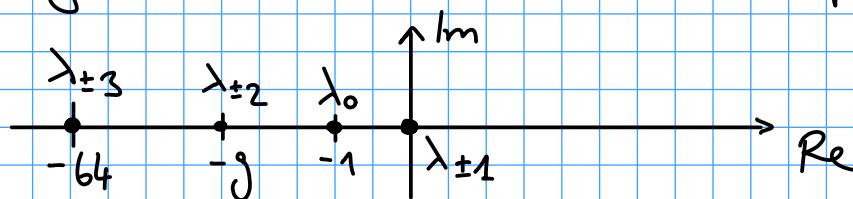
$$u(x, t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} u_m(t) e^{imx}$$

(*)

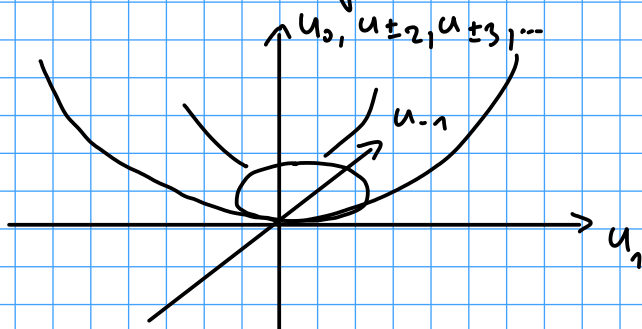
$$\Rightarrow \partial_t u_m = \lambda_m u_m + g_m(u) \quad \text{mit } \lambda_m = - (1 - m^2)^2 + \varepsilon^2,$$

$$g_m(u) = \sum_{m_1 + m_2 + m_3 = m} u_{m_1} u_{m_2} u_{m_3}.$$

Linearisierung um $u \equiv 0$ für $\varepsilon = 0$ besitzt das Spektrum



Wir erwarten eine Zentrumsmf. der Form



Berechnung:

$$u_0 = h_0(u_1, u_{-1}),$$

$$u_m = h_m(u_1, u_{-1}) \quad \text{für } m \neq \pm 1.$$

Man erhält:

- Nichtlinearität in (*) enthält keine quadratischen Terme, damit enthalten auch die h_m 's keine quadrat. Terme.
- Durch u^3 und $C_{\pm 1} e^{\pm ix}$ können keine e^{imx} -Terme mit geradem m erzeugt werden, d.h.
$$h_0 = h_2 = h_{-2} = h_4 = h_{-4} = \dots = 0.$$

Wir haben

$$\partial_t u_1 = \lambda_1 u_1 + g_1(\dots),$$

$$\partial_t u_{-1} = \lambda_{-1} u_{-1} + g_{-1}(\dots),$$

$$\partial_t u_3 = \lambda_3 u_3 + g_3(\dots).$$

In diesen Gleichungen nehmen wir zusätzlich

$$\partial_t \mathcal{E} = 0$$

dazu. Dann sind alle Terme $\mathcal{E}^2 u$ nichtlinear und die Zentrumsmf. für $\mathcal{E} = 0$ funktioniert auch für $\mathcal{E} > 0$. Da die Nichtlinearität in der SH-Gleichung keine quadr. Terme enthält, gilt $h_m = \mathcal{O}(|u_1|^3 + |u_{-1}|^3)$ für m ungerade.

Reduziertes System:

$$\partial_t u_1 = \lambda_1 u_1 + g_1(u_1, u_{-1}, u_3, u_{-3}, \dots)$$

$$\partial_t u_{-1} = \lambda_{-1} u_{-1} + g_{-1}(u_1, u_{-1}, u_3, u_{-3}, \dots)$$

$$\Rightarrow \partial_t u_1 = \lambda_1 u_1 + g_1(u_1, u_{-1}, h_3(u_1, u_{-1}), h_{-3}(u_1, u_{-1}), \dots)$$

$$\partial_t u_{-1} = \dots$$

$$\Rightarrow \partial_t u_n = \lambda_n u_n + \tilde{g}_n(u_n, u_{-n})$$

$$\partial_t u_{-n} = \lambda_{-n} u_{-n} + \tilde{g}_{-n}(u_n, u_{-n}).$$

$\tilde{g}_{\pm n}$ sind hier konkret berechenbar. Man erhält

$$\partial_t u_n = \varepsilon^2 u_n - 3u_n^2 u_{-n} + \mathcal{O}(|u_n|^5 + |u_{-n}|^5),$$

$$\partial_t u_{-n} = \varepsilon^2 u_{-n} - 3u_{-n}^2 u_n + \mathcal{O}(|u_n|^5 + |u_{-n}|^5).$$

Vernachlässigen des $\mathcal{O}(|u_n|^5 + |u_{-n}|^5)$ -Terme liefert

$$\partial_t u_n = \varepsilon^2 u_n - 3u_n^2 u_{-n},$$

$$u_{-n} = \overline{u_n}.$$

Übergang zu Polarkoordinaten liefert

$$u_n = r e^{i\varphi} : \quad \partial_t r = \varepsilon^2 r - 3r^3$$

$$\partial_t \varphi = 0.$$

