Zeige nun die Persistenz der näherungsweise berechneten stationären Lösungen bei Hinzunahme der $\mathcal{O}(|c_1|^5 + |c_{-1}|^5)$-Terme. Nutze dazu die Symmetrien des Gleichungssystems aus:

- Die Abbildung $u \mapsto -u$ erhält die Swift-Hohenberg (SH) Gleichung, d.h. mit u ist auch $-u$ eine Lösung der SH-Gl. Da wir Lösungen der Form
$$u(x,t) = u_1(t)e^{ix} + u_{-1}(t)e^{-ix} + \text{h.o.t.}$$
betrachten, entspricht diese Symmetrie der Symmetrie
$$u_1 \mapsto -u_1 \quad ; \quad u_{-1} \mapsto -u_{-1}$$
- Translationsinvarianz der SH-Gl.: Mit $u(\cdot,t)$ ist auch $u(\cdot+y,t)$ Lösung der SH-Gleichung. Dem entspricht die Symmetrie
$$u_1 \mapsto u_1 e^{iy} \quad ; \quad u_{-1} \mapsto u_{-1}e^{-iy}$$
- Reflexionssymmetrie der SH-Gl.: Mit $u(\cdot,t)$ ist auch $u(-\cdot,t)$ Lösung der SH-Gl. Dem entspricht die Symmetrie
$$u_1 \mapsto u_{-1} \quad ; \quad u_{-1} \mapsto u_1$$
- Wir betrachten reellwertige Lösungen. Somit ist $u_1 = \overline{u_{-1}}$.

Das Gleichungssystem für $u_{\pm 1}$ ist von der Form
$$\partial_t u_1 = f_1(u_1, u_{-1})$$
$$\partial_t u_{-1} = f_{-1}(u_1, u_{-1})$$

Wegen der Translationsinvarianz der SH-Gl. muss es genauer von der Form

$$\partial_t u_1 = u_1 \tilde{f}_1(|u_1|^2)$$
$$\partial_t u_{-1} = u_{-1} \tilde{f}_{-1}(|u_{-1}|^2)$$

sein. (Das ist auch konsistent mit den obigen Entwicklungen bis zu Termen dritter Ordnung.)

Unter $(u_1, u_{-1}) \mapsto (u_{-1}, u_1)$ geht das System über in

$$\partial_t u_{-1} = u_{-1} \tilde{f}_1(|u_{-1}|^2)$$
$$\partial_t u_1 = u_1 \tilde{f}_{-1}(|u_1|^2)$$

Damit $u_{\pm 1}$ das ursprüngliche System erfüllen, muss gelten:

$$\tilde{f}_{-1} = \tilde{f}_1$$

Wegen $u_1 = \overline{u_{-1}}$ gilt außerdem $\tilde{f}_1 = \overline{\tilde{f}_{-1}}$ und somit $\tilde{f}_1 = \overline{\tilde{f}_1}$, also $\tilde{f}_1 \in \mathbb{R}$.

Damit ist das System von der Form

$$\partial_t u_1 = u_1 \tilde{f}_1(|u_1|^2)$$
$$\operatorname{Im} \tilde{f}_1 = 0$$
$$u_{-1} = \overline{u_1}$$

Einführung von Polarkoordinaten $u_1 = r e^{i\varphi}$ liefert

$$\partial_t u_1 = \partial_t r \, e^{i\varphi} + i r e^{i\varphi} \partial_t \varphi$$
$$= u_1 \tilde{f}_1(|u_1|^2) = r e^{i\varphi} \tilde{f}_1(r^2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \partial_t r = r \operatorname{Re} \tilde{f}_1(r^2) = r \tilde{f}_1(r^2) \\ \partial_t \varphi = \operatorname{Im}(\tilde{f}_1(r^2)) = 0 \end{cases}$$

Wir wissen aus den obigen Entwicklungen, dass $r\tilde{f}_1(r^2)$ von der Form

$$r\tilde{f}_1(r^2) = \varepsilon^2 r - 3r^3 + \mathcal{O}(r^5)$$

sein. Wir haben also

$$\partial_t r = \varepsilon^2 r - 3r^3 + \mathcal{O}(r^5) =: F(r, \varepsilon)$$

$$\partial_t \varphi = 0$$

Definiere $\tilde{F}(\tilde{r}, \varepsilon) = \varepsilon^{-3} F(\varepsilon\tilde{r}, \varepsilon) = \tilde{r} - 3\tilde{r}^3 + \mathcal{O}(\varepsilon^2\tilde{r}^5)$. Dann gilt

$$\tilde{F}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) = 0$$

(die oben bereits berechnete statiäre Lösung),

$$\partial_{\tilde{r}} \tilde{F}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) = 1 - 9\tilde{r}^2\Big|_{\tilde{r}=\frac{1}{\sqrt{3}}} = -2 \neq 0$$

Daher ex. nach dem Satz über implizite Funktionen eine Auflösung

$$\tilde{F}(\tilde{r}(\varepsilon), \varepsilon) = 0 \quad \text{mit} \quad \tilde{r}(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{3}} + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

d.h. es ex. eine stationäre Lösung der Form

$$r = \varepsilon\frac{1}{\sqrt{3}} + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Durch Rücktransformation der Variablen ergibt sich die Behauptung des Theorems. $\square$

Allgemeine Struktur diffusiver Systeme, für die die Ginzburg-Landau-Gleichung als Approximationsgleichung hergeleitet werden kann.

Wir betrachten Systeme der Form

$$\partial_t U = LU + N_2(U,U) + N_3(U,U,U) + h.o.t.$$

mit $U = U(x,y,t) \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \Sigma$, wobei Σ eine beschränkte Menge des $\mathbb{R}^m$ ist (z.B. $[0,2\pi]$), $t \geq 0$. L ist linear, N_2 bilinear und symmetrisch (andernfalls definiere $\tilde{N}_2 = \frac{1}{2}(N_2(U,V) + N_2(V,U))$), N_j ist j-linear.

Die Koeffizienten in L, N_j hängen nicht explizit von x ab.

Die Linearisierung $\partial_t U = LU$ um die triviale Lösung $U \equiv 0$ besitzt Lösungen der Form

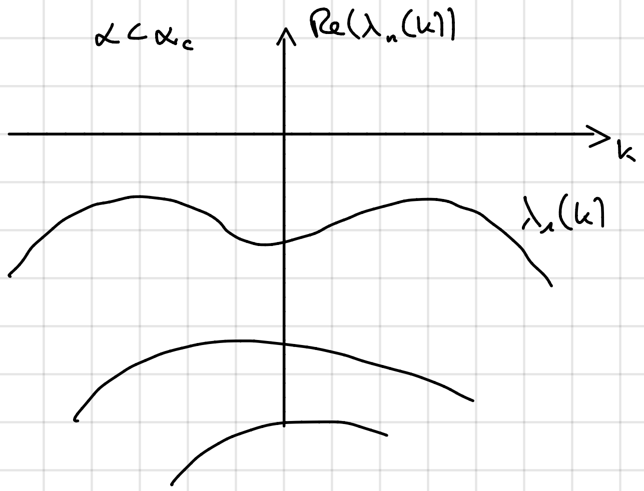
$$U(x,y,t) = \varphi_n(k,y)\, e^{ikx}\, e^{\lambda_n(k)t}$$

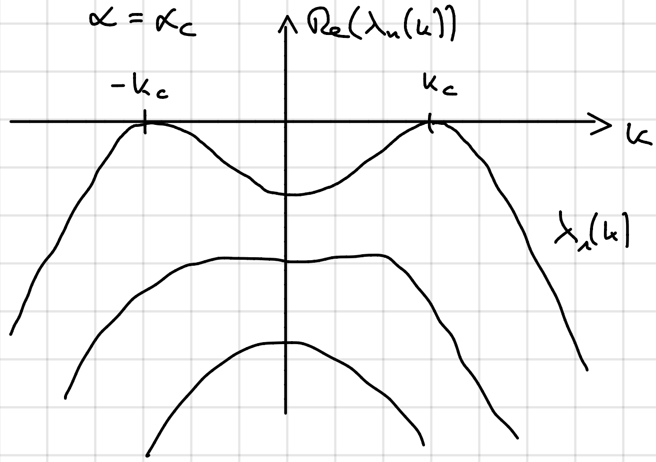
mit $k \in \mathbb{R}$.

Der Operator L sowie die vorgegebenen Randbedingungen auf $\mathbb{R} \times \Sigma$ seien so beschaffen, dass der Operator $f \mapsto -L_k f := -e^{-ikx} L(e^{ikx} f)$ für Funktionen f mit Definitionsbereich Σ elliptisch ist. Daher existiert eine abzählbare Anzahl von Eigenwertkurven $k \mapsto \lambda_n(k)$ mit zugehörigen Eigenfunktionen $\varphi_n(k,\cdot)$ mit $Re(\lambda_j) \geq Re(\lambda_{j+1})$.

Wir nehmen außerdem an, dass ein $\alpha_c \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $U \equiv 0$ stabil ist für $\alpha < \alpha_c$, d.h. für alle $\alpha < \alpha_c$

liegen die Kurven $k \mapsto Re(\lambda_n(k))$ unterhalb der k-Achse.
Außerdem gelte für $\alpha = \alpha_c$ berühre die Kurve λ_1 oder ein Paar von komplex konjugierten Eigenwertkurven (wir betrachten reellwertige Probleme) die k-Achse bei $k = \pm k_c$ und alle anderen EW-Kurven liegen unterhalb der k-Achse.





Im Folgenden betrachten wir den Fall, dass nur eine Kurve $\lambda_1 = \lambda_1(k, \varepsilon^2 = \alpha)$ die k-Achse für $(\pm k_c, 0)$ berührt, wobei $k_c \neq 0$ ist. Folglich gilt:

$$\lambda_1(k_c, 0) = 0, \quad \partial_k \lambda_1(k_c, 0) = 0 \quad \text{und} \quad \partial_k^2 \lambda_1(k_c, 0) < 0.$$