Für die Herleitung der GL-Approximation entwickeln wir die Lösung u mit Hilfe der Eigenfunktionen φ_n in der Form

$$u(x,y,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n(k,t)\, \varphi_n(k,y)\, e^{ikx}\, dk.$$

Dann gilt:

$$\partial_t c_n(k,t) = \lambda_n(k)\, c_n(k,t) + \sum_{n_1,n_2\in\mathbb{N}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{S_{2,n,n_1,n_2}(k,k-l,l)}_{\in\mathbb{C}}\, c_{n_1}(k-l)\, c_{n_2}(l)\, dl$$

$$+ \sum_{n_1,n_2\in\mathbb{N}} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{S_{3,n,n_1,n_2,n_3}(k,k-l,l-m,m)}_{\in\mathbb{C}}\, c_{n_1}(k-l)\, c_{n_2}(l-m)\, c_{n_3}(m)\, dl\, dm$$

$$+ \ldots$$

Für die Koeffizienten S_{2,n,n_1,n_2} gilt

$$S_{2,n,n_1,n_2}(k,k-l,l) = \left\langle \varphi_n^*(k), e^{-ikx} N_2\left(\varphi_{n_1}(k-l)e^{i(k-l)x}, \varphi_{n_2}(l)e^{ilx}\right)\right\rangle_{L^2(\Sigma)},$$

wobei $\varphi_n^*(k)$ die zu φ_n adjungierte Eigenfunktion (bzgl. $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2(\Sigma)}$) mit $\langle \varphi_n^*, \varphi_n\rangle_{L^2(\Sigma)} = 1$ ist. Im Allgemeinen hängen die Koeffizienten vom Parameter $\alpha = \varepsilon^2$ ab. Wir machen den Approximationsansatz

$$c_1(k,t) = \hat{A}_{1,-1}(\varepsilon^{-1}(k+k_c), \varepsilon^2 t) + \hat{A}_{1,1}(\varepsilon^{-1}(k-k_c), \varepsilon^2 t)$$

$$+ \varepsilon \hat{A}_{1,-2}(\varepsilon^{-1}(k+2k_c), \varepsilon^2 t) + \varepsilon \hat{A}_{1,0}(\varepsilon^{-1}k, \varepsilon^2 t)$$

$$+ \varepsilon \hat{A}_{1,2}(\varepsilon^{-1}(k-2k_c), \varepsilon^2 t),$$

$$c_n(k,t) = \varepsilon \hat{A}_{n,-2}(\varepsilon^{-1}(k+2k_c), \varepsilon^2 t) + \varepsilon \hat{A}_{n,0}(\varepsilon^{-1}k, \varepsilon^2 t)$$

$$+ \varepsilon \hat{A}_{n,2}(\varepsilon^{-1}(k-2k_c), \varepsilon^2 t), \qquad n \geq 2,$$

mit $\hat{A}_{n,j} \in \mathbb{C}$, $A_{n,-j} = \overline{A_{n,j}}$. Sei außerdem $K = \frac{k-k_c}{\varepsilon}$, $T = \varepsilon^2 t$.

Gilt z.B.

$$S_{211n}(k_c + \varepsilon K,\ k_c + \varepsilon(K-L),\ \varepsilon L) - S_{211n}(k_c, k_c, 0) = \mathcal{O}(\varepsilon(|K| + |L|)),$$

dann erhalten wir durch ε-Balancen:

$$\partial_T \hat{A}_{1,1}(K,T) = \partial_\alpha \lambda_1(k_c, \overset{\alpha}{0}) \hat{A}_{1,1}(K,T) + \partial_k^2 \lambda_1(k_c,0) K^2 \hat{A}_{1,1}(K,T)/2$$

$$+ 2 \sum_{n=1}^{\infty} S_{211n}(k_c, k_c, 0; \underset{\alpha}{0}) \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{A}_{1,1}(K - \mathcal{K}, T) \hat{A}_{n,0}(\mathcal{K}, T)\, d\mathcal{K}$$

$$+ 2 \sum_{n=1}^{\infty} S_{211n}(k_c, -k_c, 0; 0) \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{A}_{1,-1}(K - \mathcal{K}, T) \hat{A}_{n,2}(\mathcal{K}, T)\, d\mathcal{K}$$

$$+ 3 S_{31111}(k_c, k_c, k_c, -k_c; 0) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{A}_{1,1}(K - \mathcal{K}_1, T) \hat{A}_{1,1}(\mathcal{K}_1 - \mathcal{K}_2, T)$$

$$\cdot \hat{A}_{1,-1}(\mathcal{K}_2, T)\, d\mathcal{K}_2\, d\mathcal{K}_1,$$

$$\lambda_n(0, \overset{\alpha}{0}) \hat{A}_{n,0}(K,T) + 2 S_{2n1-1}(0, -k_c, k_c; 0)$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{\infty} \hat{A}_{1,-1}(K - \mathcal{K}, T) \hat{A}_{1,1}(\mathcal{K}, T)\, d\mathcal{K} = 0,$$

$$\lambda_n(2k_c, 0) \hat{A}_{n,2}(K,T) + S_{2n11}(2k_c, k_c, k_c; 0)$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{\infty} \hat{A}_{1,1}(K - \mathcal{K}, T) \hat{A}_{1,1}(\mathcal{K}, T)\, d\mathcal{K} = 0.$$

Wegen $\mathrm{Re}\, \lambda_n(0,0) < 0$ und $\mathrm{Re}\, \lambda_n(2k_c, 0) < 0$ sind die obigen beiden algebraischen Gleichungen nach $\hat{A}_{n,0}$ und $\hat{A}_{n,2}$ auflösbar (in Termen von $\hat{A}_{1,1}$ und $\hat{A}_{1,-1}$). Damit ergibt sich

$$\partial_T \hat{A}_{1,1}(K,T) = \nu_0 \hat{A}_{1,1}(K,T) - \nu_2 K^2 \hat{A}_{1,1}(K,T)$$

$$+ \nu_3 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{A}_{1,1}(K-\mathcal{K},T)\, \hat{A}_{1,1}(\mathcal{K}-\tilde{\mathcal{K}},T)\, \hat{A}_{1,-1}(\tilde{\mathcal{K}},T)\, d\tilde{\mathcal{K}}\, d\mathcal{K}$$

mit

$$\nu_0 = \partial_\alpha \lambda_1(k_c,0),$$

$$\nu_2 = \frac{1}{2}\partial_k^2 \lambda_1(k_c,0),$$

$$\nu_3 = -4 \sum_{k=1}^{\infty} s_{211n}(k_c,k_c,0,0)\, s_{2n1-1}(0,-k_c,k_c,0) / \lambda_n(0,0)$$

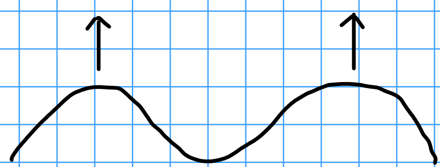
$$-2 \sum_{k=1}^{\infty} s_{211n}(k_c,-k_c,2k_c,0)\, s_{2n11}(2k_c,k_c,k_c,0) / \lambda_n(2k_c,0)$$

$$+ 3\, s_{31111}(k_c,k_c,k_c,-k_c,0).$$

(Bei vielen konkreten Gleichungen lässt sich ν_3 auch einfacher berechnen.)

Rücktransformation in den physikalischen Raum liefert die GL-Gleichung für $A_{1,1}$.

Bemerkung 1: Haben wir statt λ_1 ein Paar von komplex konjugierten Eigenkurven, deren Realteile bei $\pm k_c \neq 0$ das Vorzeichen wechseln, wenn α zuerst $< \alpha_c$ und dann $> \alpha_c$ ist, dann lässt sich die GL-Approximation analog herleiten.



Bemerkung 2: Auch für den Fall, dass die Realteile zweier komplex konjugierter Eigenkurven $\lambda_\pm$ bei $k_c = 0$ von $-$ nach $+$ wechseln, lässt sich die GL-Approximation mittels

$$u = \varepsilon A(\varepsilon x, \varepsilon^2 t) \underbrace{\varphi}_{\in \mathbb{C}^2} e^{i(\operatorname{Im}\lambda_+|_{k=0,\alpha=\alpha_c})t} + c.c. + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

herleiten. Ein Beispiel dafür ist

$$\lambda_\pm(k,\varepsilon^2) = \pm i\underbrace{\omega}_{>0} + \varepsilon^2\left(\underbrace{\lambda_0}_{>0} \pm i\nu_0\right) + |k|^2\left(\underbrace{\lambda_2}_{<0} \pm i\nu_2\right) + \mathcal{O}\left(\varepsilon^3+|k|^3\right),$$

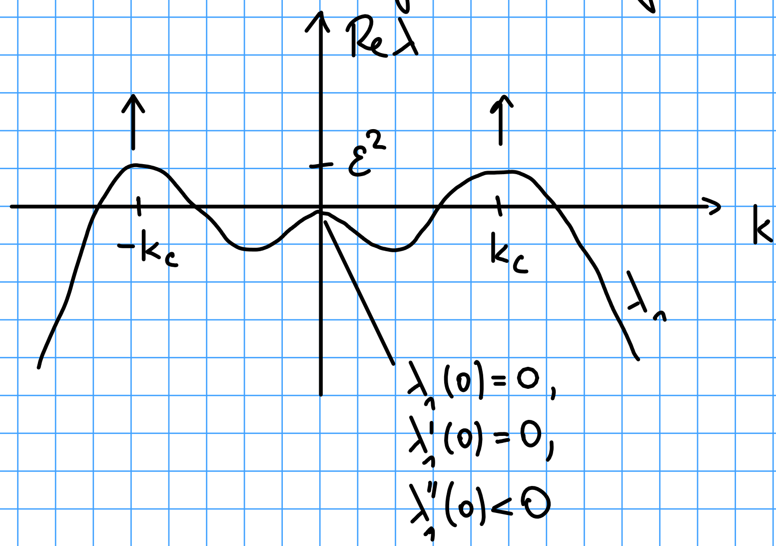
wobei alle anderen Eigenwertkurven negativ sind.

<u>Bemerkung 3:</u> Die GL-Approximation funktioniert auch für positiv werdende Realteile von Eigenwertkurven der Form

$$\lambda_\pm(k,\varepsilon^2) = -(1-k^2)^2 \mp ik + \varepsilon^2.$$

Hier erhält man ein System zweier gekoppelter GL-Gleichungen.

<u>Bemerkung 4:</u> Eine weitere mögliche Verallgemeinerung ist die Situation:



<u>Bemerkung 5:</u> Die oben erwähnten Situationen für GL-Approximationen lassen sich in der Theorie der Dynamischen Systeme als Turing-Bifurkationen, Hopf-Bifurkationen oder Turing-Hopf-Bifurkationen interpretieren.

<u>Bemerkung 6:</u> Die anfangs erwähnten physikalischen Probleme (Rayleigh-Bénard-Konvektion, Brusselator, Taylor-Couette-Strömungen) lassen sich in die oben genannten Fälle einordnen und man kann Approximationssätze für die GL-Approximation dieser Systeme beweisen.

5. Die Approximationen durch die Phasendiffusionsgleichungen und die viskose Burgersgleichung

Wir betrachten zunächst die (reskalierte) Ginzburg-Landau-Gleichung

$$\partial_T A = \partial_X^2 A + A - A|A|^2.$$

Diese Gleichung besitzt periodische Lösungen der Form

$$A(X,T) = \sqrt{1-q^2}\, e^{iqX}, \qquad |q| < 1.$$

Aufgrund der Rotationssymmetrie der GL-Gleichung können wir zu Polarkoordinaten $A(X,T) = r(X,T)\, e^{i\varphi(X,T)}$ übergehen und erhalten

$$\partial_T r = r + \partial_X^2 r - (\partial_X \varphi)^2 r - r^3,$$

$$\partial_T \varphi = \partial_X^2 \varphi + \frac{2(\partial_X \varphi)(\partial_X r)}{r}.$$

$$\partial_T A = \partial_T r\, e^{i\varphi} + r e^{i\varphi} i\, \partial_T \varphi,$$

$$\partial_X^2 A = \partial_X^2 r\, e^{i\varphi} + 2\partial_X r\, e^{i\varphi} i\, \partial_X \varphi + r e^{i\varphi} (i\partial_X \varphi)^2 + r e^{i\varphi} i\, \partial_X^2 \varphi$$

Die periodischen Lösungen sind nun

$$r(X,T) = \sqrt{1-q^2},$$

$$\varphi(X,T) = qX.$$