

Zur Untersuchung der Stabilität der periodischen Lösungen führen wir die folgenden Koordinaten ein:

$$(r, \partial_x \varphi) = (\sqrt{1-q^2} + s, q + \psi).$$

Dann gilt:

$$\partial_T s = \partial_x^2 s - 2(1-q^2)s - 2q\sqrt{1-q^2}\psi - \sqrt{1-q^2}\psi^2 - 2q\psi s - 3\sqrt{1-q^2}s^2 - \psi^2 s - s^3,$$

$$\partial_T \psi = \partial_x^2 \psi + 2\partial_x \frac{(\partial_x s)(q + \psi)}{\sqrt{1-q^2} + s}.$$

Die Linearisierung um  $s = \psi = 0$  besitzt Lösungen der Form

$$(s, \psi) = (s_k, \psi_k) e^{ikx + \mu_j(k)t}$$

mit

$$\mu_{1/2}(k) = -k^2 - (1-q^2) \pm \sqrt{(1-q^2)^2 + 4q^2 k^2}.$$

Es gilt:

$$\mu_2(k) < 0,$$

$$\mu_1(0) = 0,$$

$$\mu_1 \text{ ist gerade bzgl. } k \Rightarrow \partial_k \mu_1(0) = 0.$$

Entscheidend für die (lineare) Stabilität von  $(\sqrt{1-q^2}, q)$  ist das Vorzeichen von  $\partial_k^2 \mu_1(0)$  in Abhängigkeit von  $q$ .

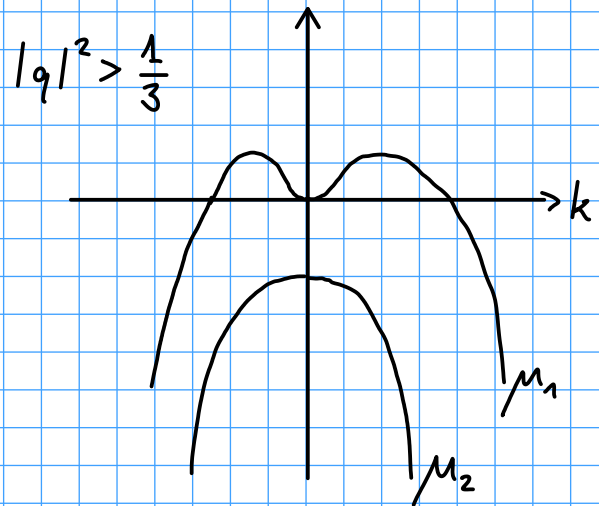
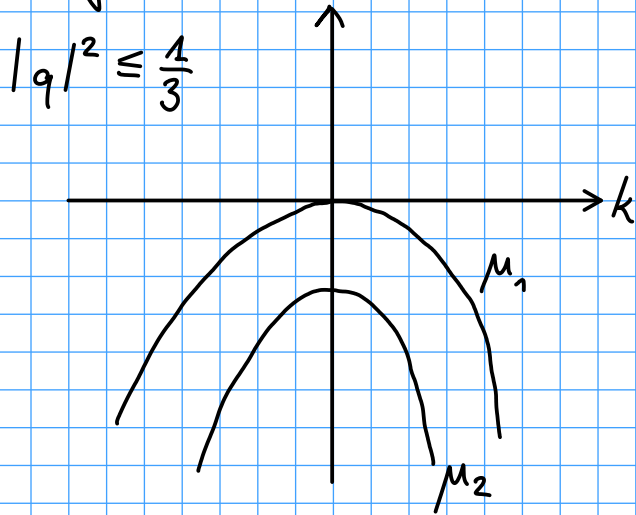
Entwicklung von  $\mu_1(k)$  um  $k=0$  liefert

$$\mu_1(k) = \frac{3q^2 - 1}{1 - q^2} k^2 + \mathcal{O}(k^4).$$

$\Rightarrow \mu_1(k)$  wird positiv für kleine  $k$ , falls  $\frac{3q^2 - 1}{1 - q^2} > 0$ . Wegen

$q^2 < 1$  liegt Instabilität vor für  $q^2 > \frac{1}{3}$ .

(sogenannte Seitenband- oder Eckhaus-Instabilität)



Wir machen nun den Ansatz:

$$s(X, T) = \varepsilon \check{s}(\varepsilon X, \varepsilon^2 T),$$

$$\psi(X, T) = \varepsilon \check{\psi}(\varepsilon X, \varepsilon^2 T)$$

mit  $0 < \varepsilon \ll 1$ . Balancieren der  $\varepsilon$ -Potenzen liefert dann:

$$\check{s} = -q(1 - q^2)^{-1/2} \check{\psi}$$

und für  $|q| < \sqrt{\frac{1}{3}}$ :

$$\partial_{\tau} \check{\psi} = \frac{1 - 3q^2}{1 - q^2} \partial_{\xi}^2 \check{\psi} \quad (\text{Diffusionsgleichung})$$

mit  $\xi = \varepsilon X$ ,  $\tau = \varepsilon^2 T$ , sowie für  $|q| = \sqrt{\frac{1}{3}}$ :

$$\partial_{\tilde{\tau}} \check{\psi} = \frac{3}{2(-q)} \partial_{\tilde{\xi}}^2 (\check{\psi}^2)$$

mit  $\tilde{\xi} = \varepsilon X$ ,  $\tilde{\tau} = \varepsilon^3 T$ . Dies ist ein Spezialfall der Porösen-Medien-Gleichung

$$\partial_{\tilde{\tau}} f = c \partial_{\tilde{\xi}}^2 (f^m), \quad m > 1.$$

Für  $q = \sqrt{1/3} + v\varepsilon^2$ ,  $v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , machen wir den Ansatz

$$s(X, T) = \varepsilon^2 \check{s}(\varepsilon X, \varepsilon^4 T),$$

$$\psi(X, T) = \varepsilon^2 \check{\psi}(\varepsilon X, \varepsilon^4 T).$$

$\varepsilon$ -Balancieren liefert dann

$$\check{s} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}\check{\psi}$$

sowie die (nicht-degenerierte) Cahn-Hilliard-Gleichung

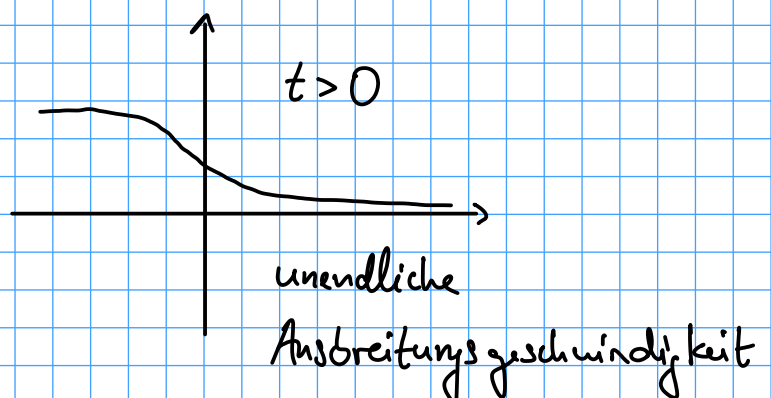
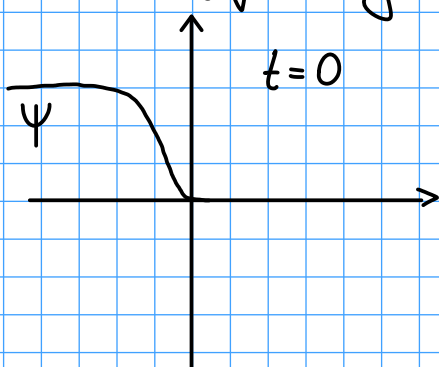
$$\partial_\tau \check{\psi} = -3\sqrt{3}v \partial_\xi^2 \check{\psi} - \frac{3}{4} \partial_\xi^4 \check{\psi} - \frac{3}{2}\sqrt{3} \partial_\xi^2 (\check{\psi}^2)$$

mit  $\xi = \varepsilon X$ ,  $\tau = \varepsilon^4 T$ . Da  $\psi$  die Ortsableitung der Phase  $\varphi$  ist und die obigen Differentialgleichungen lineare bzw. nichtlineare Diffusionsgleichungen sind, spricht man auch von Phasendiffusionsgleichungen.

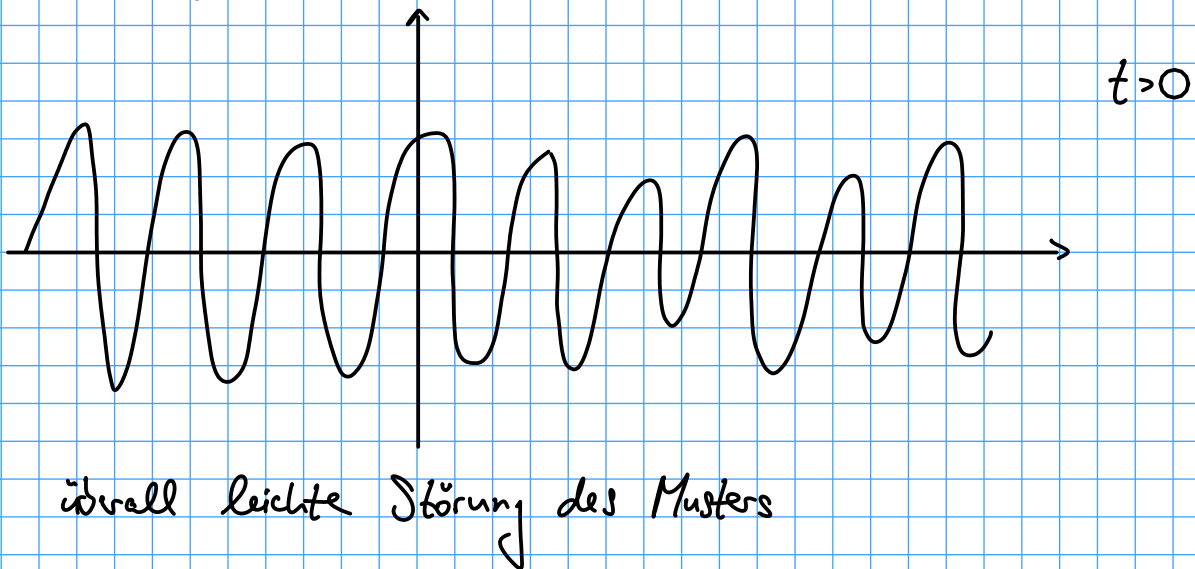
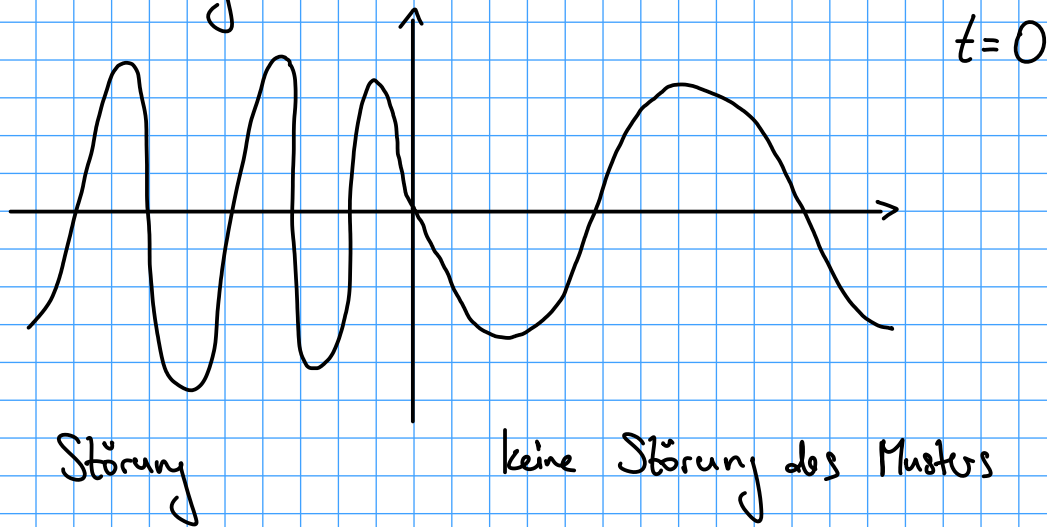
Für diese Approximationen kann man Rechtfertigungssätze beweisen, im Falle der Wärmeleitungsgleichung und der Cahn-Hilliard-Gleichung mit Hilfe der Variation der Konstanten-Formel und der Gronwall'schen Ungleichung (in Räumen, in denen das System semilinear ist), im Falle der Porösen-Medien-Gleichung mit Hilfe von Energieabschätzungen.

Übersetzung der Dynamik der Diffusionsgleichung bzw. der Porösen-Medien-Gleichung in die Dynamik der GL-Gleichung:

Wärmeleitungsgleichung (WGL):



GL-Gleichung:



Zur Dynamik der Porösen-Medien-Gleichung (PM-Gleichung):

Die PM-Gleichung modelliert Diffusion von Flüssigkeiten in porösen Medien, z.B. Grundwasserfluss. Im Vergleich zur Herleitung der Wärmeleitungsgleichung  $\partial_t u = c \partial_x^2 u$  ändert man das Gesetz für den Fluss  $j$  ( $j = c \nabla u$ ) (Ficksches Gesetz) ab zu  $j = c \nabla p$  ( $p \hat{=} \text{Druck}$ ) mit  $p = u^m$  (Darcysches Gesetz).

Wegen

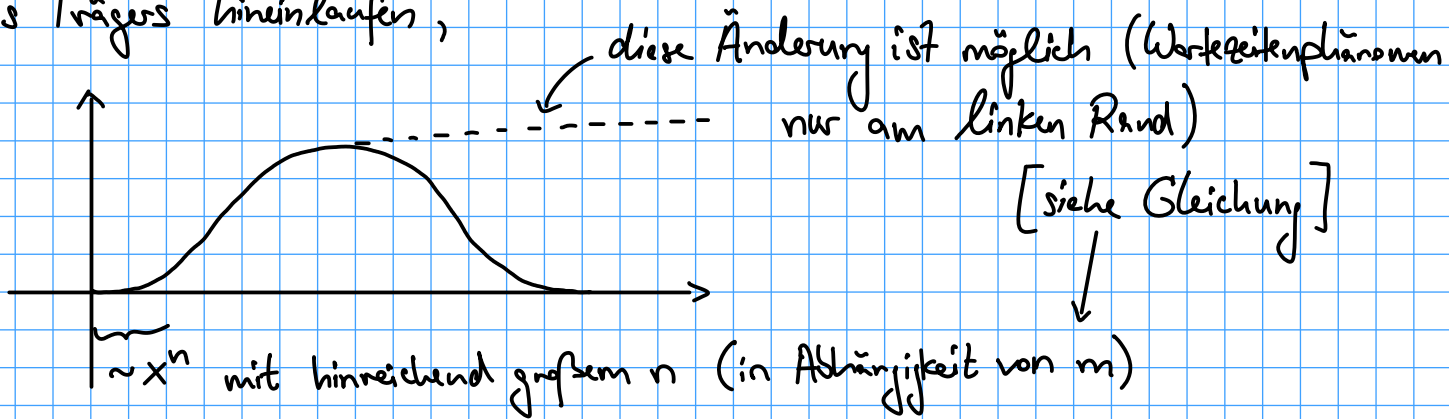
$$c \partial_x^2 (f^m) = \tilde{c} f^{m-1} \partial_x^2 f + \text{Terme mit weniger Ableitungen}$$

entspricht  $\tilde{c} f^{m-1}$  dem Diffusionskoeffizienten. Somit haben wir bei hohen Konzentrationen von  $u$  größere Diffusion als bei niedrigen, wobei der Diffusionskoeffizient gegen 0 geht für  $u \rightarrow 0$  (degenerierte Diffusion).

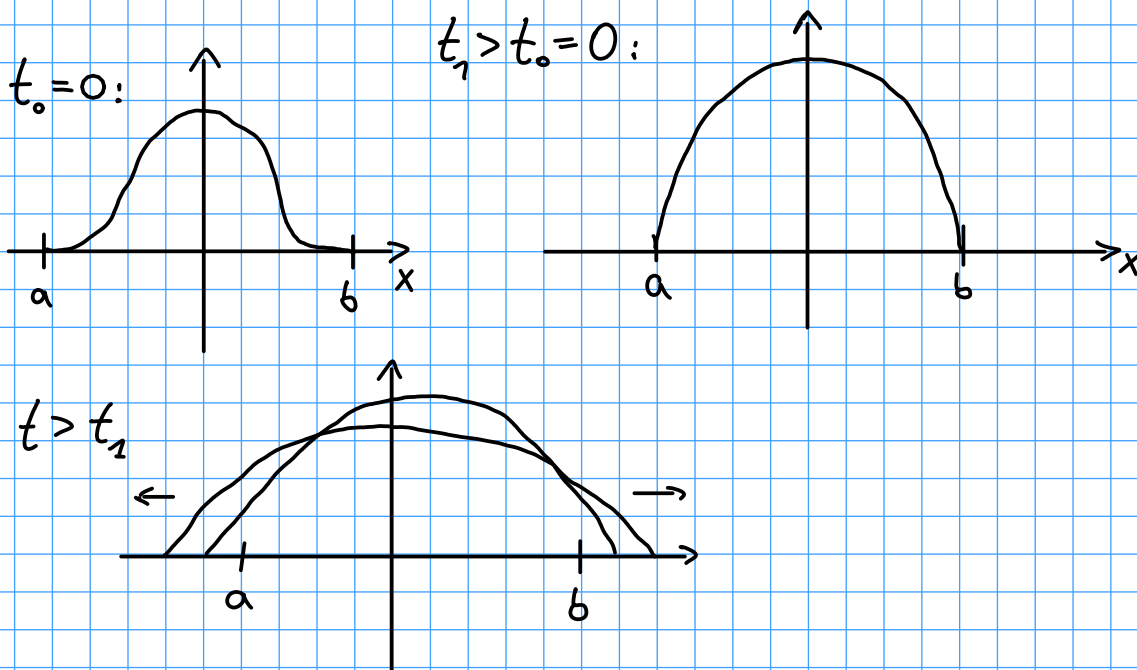
Konsequenz: endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit.

Für große Zeiten hat man auch Konvergenz gegen selbstähnliche Profile (sogenannte Barenblatt-Lösungen).

Startet man mit kompakten Anfangsdaten, die hinreichend glatt in den Rand ihres Trägers hineinlaufen,

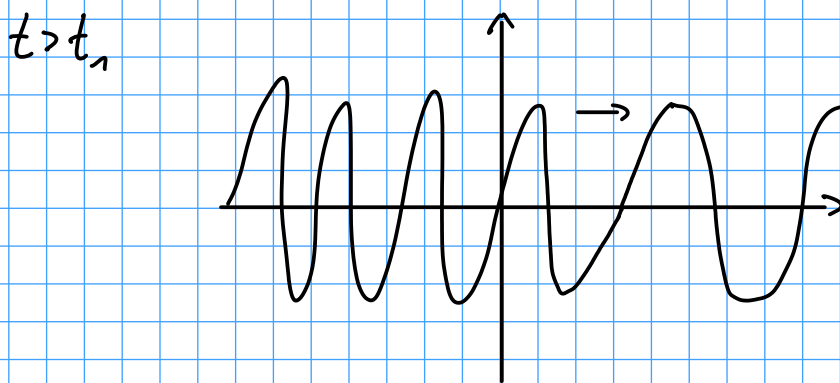
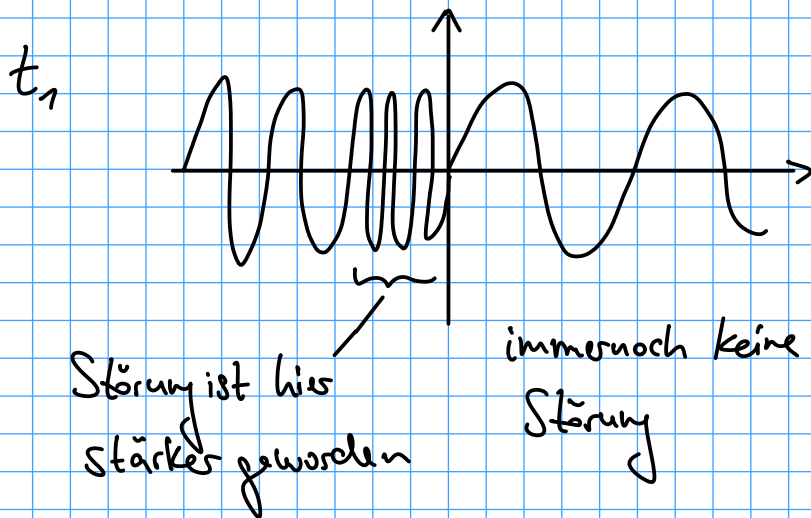
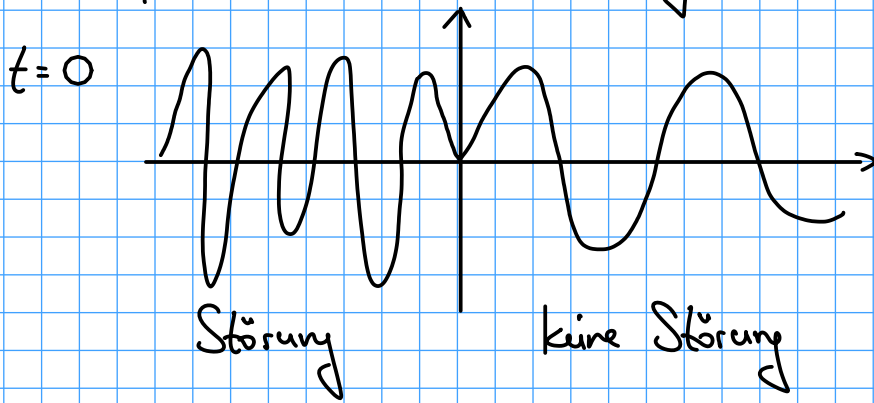


dann tritt ein sogenanntes Wertezeitenphänomen auf, d.h. der Träger bleibt für eine gewisse Zeit konstant und ändert sich erst, wenn das Profil am Trägerrand hinreichend steil geworden ist.



(Beweis entweder mit Hilfe spezieller Vergleichslösungen (selbstähnliche Lösungen, fortschreitende Wellenlösungen), da für die PM-Gleichung das Vergleichsprinzip gilt oder mit Hilfe von Integralabschätzungen)

Konsequenz für die GL-Gleichung:

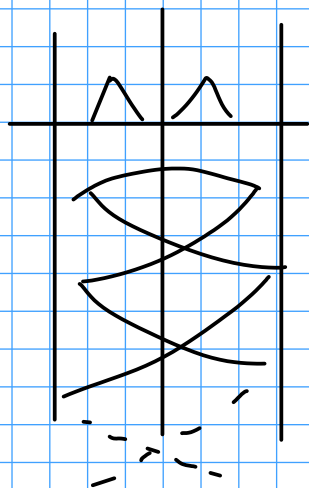


Störung breitet sich mit  
endl. Geschwindigkeit nach  
rechts aus

Es ist noch offen, ob sich die Konvergenz gegen selbstähnliche Profile auch auf die Dynamik der Ginzburg-Landau-Muster übertragen lässt.

Bem.1: Da die Ginzburg-Landau-Muster zur Approximation von Mustern der Swift-Hohenberg-Gleichung verwendet werden, kann man die oben diskutierten Stabilitäts- bzw. Instabilitätsaussagen auch auf die Swift-Hohenberg-Muster übertragen (bzgl. lokalisierter Störungen, da ja die  $2\pi$ -periodischen stationären Lösungen unter  $2\pi$ -periodischen Störungen stabil sind), da die spektrale Situation ähnlich ist.

Bem. 2: Die Herleitung und Rechtfertigung der Phasendiffusionsgleichungen für die GL-Gleichung lässt sich verallgemeinern, indem man die GL-Gleichung durch diffusive Systeme (z.B. Reaktions-Diffusions-Systeme) ersetzt, welche stationäre periodische Lösungen besitzen, für die die Linearisierungen um diese Lösungen analoge Eigenwertkurven liefert. Da diese Systeme im Allgemeinen nicht rotationssymmetrisch sind, muss man hierbei die Fourierreihe durch die Blochwellenanalyse ersetzen.



Betrachtet man statt der (reellen) Ginzburg-Landau-Gleichung die komplexe Ginzburg-Landau-Gleichung

$$\partial_T A = (1 + i\alpha) \partial_X^2 A - A - (1 + i\beta) A |A|^2, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}, (\alpha, \beta) \neq (0, 0),$$

so besitzt sie anstelle der stationären periodischen Lösungen zeitabhängige periodische Lösungen der Form

$$A(X, T) = r(q) e^{i(qX - \omega(q)T)}$$

mit

$$r(q) = \sqrt{1 - q^2}, \quad |q| < 1,$$

$$\omega(q) = \beta + (\alpha - \beta) q^2.$$

Die Linearisierungen um die Lösungen lassen sich analog auf Stabilität untersuchen. Im stabilen Fall erhält man als Analogon zur Wärme-

Leitungsgleichung die viskose Burgers - Gleichung

$$\partial_{\tau} \check{\psi} = (1 + \alpha\beta) \partial_{\xi}^2 \check{\psi} + (\beta - \alpha) \partial_{\xi} (\check{\psi}^2), \quad \tau = \varepsilon^2 T, \quad \xi = \varepsilon X, \\ 0 < \varepsilon \ll 1,$$

als Approximationsgleichung für die Ortsableitung  $\psi(X, T) = \varepsilon \check{\psi}(\varepsilon X, \varepsilon^2 T)$  der Phase  $\varphi$  in Polarkoordinaten.

Auch hier kann man die komplexe GL-Gleichung durch allgemeine diffusive Systeme mit zeitperiodischen Lösungen und ähnlichen Spektralbildern ersetzen.