MGl. Vorlesung 3 Mo, 11.04.2016

$$\partial_t^2 u = \partial_x^2 u - u - u^3$$

$$\varepsilon \psi_{NLS} = \varepsilon A(\varepsilon(x - c_g t), \varepsilon^2 t)\, e^{i(k_0 x + \omega_0 t)} + c.c.$$

$$\Rightarrow \quad \omega_0^2 = k_0^2 + 1 \quad , \quad c_g = \frac{d}{dk}\omega \Big|_{k=k_0} \quad , \quad \partial_T A = -i\frac{(1-c_g^2)}{2}\partial_x^2 A \, , \; -3A|A|^2$$

$$Res(\varepsilon \psi_{NLS}) = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

Erweiterung des Approximationsansatzes gemäß

$$\varepsilon \psi_4 = \varepsilon \psi_{NLS} + \varepsilon^3 \left(A_3(\varepsilon(x - c_g t), \varepsilon^2 t)\, E^3 + c.c. \right) \quad \text{mit } E = e^{i(k_0 x + \omega_0 t)}$$

liefert

$$Res(\varepsilon \psi_4) = \varepsilon^3 E^3 \left(-A^3 - (9\omega_0^2 - 9k_0^2 - 1)A_3 \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^4).$$

Wegen

$$9\omega_0^2 - 9k_0^2 - 1 = 9(k_0^2 + 1) - 9k_0^2 - 1 = 8 \neq 0$$

können wir

$$A_3 = -(9\omega_0^2 - 9k_0^2 - 1)^{-1} A^3$$

wählen und erhalten

$$Res(\varepsilon \psi_4) = \mathcal{O}(\varepsilon^4).$$

Diese Strategie kann fortgesetzt werden: analog hier 2. (Ansatz-) Funktion mit E^3

$$\varepsilon \psi_5 = \varepsilon \psi_4 + \varepsilon^2 A_{12}(\varepsilon(x - c_g t), \varepsilon^2 t)\, E + \varepsilon^4 A_{32}(\varepsilon(x - c_g t), \varepsilon^2 t)\, E^3 + c.c.$$

$$\Rightarrow Res(\varepsilon \psi_5) = \varepsilon^4 E \big(-2i\omega_0 \partial_T A_{12} + (1 - c_g)^2 \partial_x^2 A_{12} - 3A^2 \overline{A_{12}} - 6|A|^2 A_{12} - 2c_g \partial_x \partial_T A \big) + \varepsilon^4 E^3 \big((9\omega_0^2 - 9k_0^2 - 1)A_{32} - 3A^2 A_{12} \big) + \mathcal{O}(\varepsilon^5) + c.c.$$

Löst A_{12} die Gleichung

$$\partial_T A_{12} = -i\frac{(1-c_g^2)}{2\omega_0}\partial_x^2 A_{12} + \frac{3i}{2\omega_0} A^2 \overline{A_{12}} + \frac{3i}{\omega_0}|A|^2 A_{12} + \frac{c_g i}{\omega_0}\partial_x \partial_T A$$

und sei

$$A_{32} = \frac{3}{(g\omega_0^2 - gk_0^2 - 1)} A^2 A_{12} ,$$

dann folgt

$$\mathrm{Res}(\varepsilon\psi_5) = \mathcal{O}(\varepsilon^5).$$

Um $\mathrm{Res}(\varepsilon\psi_n) = \mathcal{O}(\varepsilon^n)$ zu erreichen, wählen wir

$$\varepsilon\psi_n = \sum_{m=-N}^{N} \sum_{j=1}^{\tilde{\alpha}(m)} \varepsilon^{\alpha(m)+(j-1)} A_{mj}(X,T)\, E^m$$

mit $N = n-1$ und

m	0	1	2	3	4	5	...	m	...	N
$\alpha(m)$	2	1	2	3	4	5		$\lvert\lvert m\rvert-1\rvert+1$		N
$\tilde{\alpha}(m)$	$N-1$	$N-2$	$N-1$	$N-2$	$N-3$	$N-4$		$N+1-\alpha(m)-2\delta_{\lvert m\rvert 1}$		1

A_{11} löst die NLS-Gleichung,
A_{1j}, $j \geq 2$ lösen inhomogene lineare Schrödingergleichungen,
A_{mj}, $m \neq \pm 1$ lösen algebraische Gleichungen, die deswegen lösbar sind, weil die sogenannten Nichtresonanzbedingungen

$$\forall m = -N, \dots, N: \quad (m\omega_0)^2 - (mk_0)^2 - 1 \neq 0$$

erfüllt sind.

Ist [allgemeiner] $N(u) = u^p$ mit p ungerade (wie für $p=3$), dann kann man $A_{mj} = 0$ für alle ungeraden m wählen.

Es gilt

$$\| \mathrm{Res}(\varepsilon\psi_{NLS}) \|_{C^0} \leq S_1 + S_2 + S_3$$

mit

$$S_1 = 2\varepsilon^3 \| E^3 A^3 \|_{C^0} \leq 2\varepsilon^3 \| A^3 \|_{C^0}$$
$$S_2 = 4\varepsilon^4 \| E c_g \partial_X \partial_T A \|_{C^0} \leq 4\varepsilon^4 \| \partial_T A \|_{C^1}$$
$$S_3 = 2\varepsilon^5 \| E \partial_T^2 A \|_{C^0} \leq 2\varepsilon^5 \| \partial_T^2 A \|_{C^0}$$

wobei

$$\|\partial_T A\|_{C^1} \overset{\text{NLS-Gl.}}{\leq} \frac{1}{2\omega_0}\left((1-c_g^2)\,\|\partial_X^2 A\|_{C^1} + 3\|A\|_{C^1}^3\right) < \infty,$$

falls $A \in C_b^3$, entsprechend

$$\|\partial_T^2 A\|_{C^0} < \infty,$$

falls $A \in C_b^4$.

Allgemein erhalten wir:

<u>Proposition 1.2.1:</u>

Sei $A \in C([0,T_0], C_b^4)$ eine Lösung des NLS-Gleichung. Dann existiert für alle $\varepsilon \in (0,1]$ eine Konstante $C>0$, sodass $\forall \varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$:

$$\sup_{[0,T_0/\varepsilon^2]} \|\mathrm{Res}(\varepsilon\psi_{NLS}(t))\|_{C_b^0} \leq C\varepsilon^3.$$

Ist sogar $A \in C^0([0,T_0], C_b^{\theta_A})$ mit $\theta_A = 3(n-3)+1$, dann gilt außerdem

$$\sup_{t\in[0,T_0/\varepsilon^2]} \|\mathrm{Res}(\varepsilon\psi_n(t))\|_{C^0} \leq C\varepsilon^n,$$

$$\sup_{t\in[0,T_0/\varepsilon^2]} \|\varepsilon\psi_{NLS}(t) - \varepsilon\psi_n(t)\|_{C^0} \leq C\varepsilon^2.$$

Γ $\|\partial_T^2 A_{12}\|_{C^0} \rightsquigarrow A_{12} \in C_b^4$

$\rightsquigarrow \partial_X \partial_T A \in C_b^4 \rightsquigarrow A \in C_b^7$

$\xrightarrow{\text{Induktion}} \theta_A = 3(n-3+1)$ $\llcorner$

Abschätzung des Residuums in Sobolevräumen:

Sei $A \in C([0,T_0], H_X^{\theta_A})$ Lösung der NLS-Gleichung mit $\theta_A \geq 0$ hinr. groß.

$$\Rightarrow \| Res(\varepsilon \psi_{NLS}(\cdot)) \|_{H_x^\theta}$$
$$\leq C\Big(\varepsilon^3 \|A(\varepsilon\cdot)\|_{H_x^\theta} \|A(\varepsilon\cdot)\|^2_{C^0} + \varepsilon^4 \|\partial_X \partial_T A(\varepsilon\cdot)\|_{H_x^\theta}$$
$$+ \varepsilon^5 \|\partial_T^2 A(\varepsilon\cdot)\|_{H_x^\theta}\Big)$$
$$= \varepsilon^3 \mathcal{O}\left(\|A(\varepsilon\cdot)\|_{H_x^{\theta+4}}\right).$$

Wegen

$$\|A(\varepsilon\cdot)\|_{L_x^2} = \left(\int |A(\varepsilon x)|^2 dx\right)^{1/2} = \varepsilon^{-1/2}\left(\int |A(X)|^2 dX\right)^{1/2}$$
$$= \varepsilon^{-1/2} \|A\|_{L_X^2}$$

ist

$$\| Res(\varepsilon \psi_{NLS}) \|_{H_x^\theta} = \varepsilon^{5/2} \mathcal{O}\left(\|A\|_{H_X^{\theta+4}}\right)$$

$\leftarrow$ Problem in höheren Dimension, man verliert höhere Potenzen von ε (anders bei den Ableitungen)

für $\theta \leq \theta_A - 4$. Allgemein gilt:

<u>Proposition 1.2.2:</u>

Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\theta \geq 1$ gilt: Sei $A \in C^0([0,T_0], H^{\theta_A})$ mit $\theta_A = 3(n-3)+1+\theta$ Lösung der NLS-Gleichung. Dann existiert für alle $\varepsilon_0 \in (0,1]$ ein $C>0$, so dass es für alle $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ eine Approximation $\varepsilon\psi_n$ gibt mit

$$\sup_{t\in[0,T_0/\varepsilon^2]} \| Res(\varepsilon \psi_n(t)) \|_{H^\theta} \leq C \varepsilon^{n-1/2},$$

$$\sup_{t\in[0,T_0/\varepsilon^2]} \| \varepsilon \psi_{NLS}(t) - \varepsilon \psi_n(t) \|_{H^\theta} \leq C \varepsilon^{3/2}.$$