MGl. Vorlesung 4 Di, 12.04.2016

Rechtfertigung der NLS-Approximation:

Schreibe die Lösung u der nichtlin. Wellengl. als Approx. + Fehler:

$$u = \varepsilon \psi_n + \varepsilon^{\beta} R$$

$$\Rightarrow \partial_t^2 R = \partial_x^2 R - R - 3\varepsilon^2 \psi_n^2 R - 3\varepsilon^{\beta+1} \psi_n R^2 - \varepsilon^{2\beta} R^3 + \varepsilon^{-\beta} \mathrm{Res}(\varepsilon \psi_n)$$

$$=: \partial_x^2 R - R + f$$

__Theorem 1.2.3:__

Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\theta \geq 1$ gilt: Sei $A \in C([0,T_0], H^{\theta_A})$ mit $\theta_A = 3(n-3) + 1 + \theta$ eine Lösung der obigen NLS-Gleichung. Dann existiert $\varepsilon_0 > 0$, $C > 0$, so dass für alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ Lösungen der nichtlinearen Wellengleichung mit $N(u) = u^3$ existieren, für die gilt:

$$\sup_{t \in [0, T_0/\varepsilon^2]} \| u(t) - \varepsilon \psi_n(t) \|_{H^\theta} \leq C \varepsilon^{-5/2},$$

$$\sup_{t \in [0, T_0/\varepsilon^2]} \| u(t) - \varepsilon \psi_{NLS}(t) \|_{H^\theta} \leq C \varepsilon^{3/2}.$$

__Beweis:__

1. Beweismethode: Energieabschätzungen.

Sei

$$E(R) = \int_{\mathbb{R}} (\partial_t R)^2 + (\partial_x R)^2 + R^2 \, dx$$

$$\Rightarrow \partial_t E = 2 \int_{\mathbb{R}} \partial_t R \, \partial_t^2 R + (\partial_x R)(\partial_t \partial_x R) + R \partial_t R \, dx$$

$$= 2 \int_{\mathbb{R}} \partial_t R \left(\cancel{\partial_x^2 R} - \cancel{R} + f \right) + \partial_x R \underbrace{\cancel{(\partial_t \partial_x R)}}_{\text{part. Int.} \to 0} + \cancel{R \partial_t R} \, dx$$

$$= 2 \int \partial_t R \, f \, dx \leq 2 \| \partial_t R \|_{L^2} \| f \|_{L^2}.$$

Abschätzungen für f:

$$\|3\varepsilon^2\psi_n^2 R\|_{L^2} \le 3\varepsilon^2\|\psi_n\|_{C^0}^2\|R\|_{L^2} \le 3\varepsilon^2\|\psi\|_{C^0}^2 E^{1/2}$$

$$\|\psi\|_{C^0} = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| A(\varepsilon(x-c_g t), \varepsilon^2 t)\, E + c.c. + \varepsilon^2 A_3(\dots) E^3 + c.c. + \dots \right|$$

$$\le \underbrace{\sup_{X\in\mathbb{R}} |A(X,T)|}_{\le C\|A\|_{H^s},\ s>1} + C\varepsilon^2 \underbrace{\sup_{X\in\mathbb{R}} |A(X,T)|^3}_{\le C\|A\|_{H^s}^3} + \dots$$

$$\le \underbrace{C(\|A\|_{H^{\theta_A}})}_{\text{unabh. von } \varepsilon<\varepsilon_0} < \infty,$$

$$\|3\varepsilon^{\beta+1}\psi_n R^2\|_{L^2} \le 3\varepsilon^{\beta+1}\|\psi_n\|_{C^0}\|R\|_{C^0}\|R\|_{L^2}$$

$$\le 3\varepsilon^{\beta+1} C(A)\|R\|_{H^1}^2$$

$$\le 3\varepsilon^{\beta+1} C(A) E,$$

$$\|\varepsilon^{2\beta}R^3\| \le \varepsilon^{2\beta}\|R\|_{C^0}^2\|R\|_{L^2} \le C\varepsilon^{2\beta}\|R\|_{H^1}^3$$

$$\le C\varepsilon^{2\beta}E^{3/2},$$

$$\|\varepsilon^{-\beta}\mathrm{Res}(\varepsilon\psi_n)\| \le \underbrace{C_{Res}}_{\text{unabh. von } \varepsilon} \cdot \varepsilon^{n-1/2-\beta}.$$

$$\Rightarrow \partial_t E \le E^{1/2}\left(C_1\varepsilon^2 E^{1/2} + C_2\varepsilon^{\beta+1}E + C_3\varepsilon^{2\beta}E^{3/2} + C_{Res}\varepsilon^{n-\frac{1}{2}-\beta}\right)$$

mit Konstanten $C_1, \dots, C_{Res}$, die unabh. von ε sind.

$$\Rightarrow \partial_T E \le C_1 E + C_2\varepsilon^{1/2}E^{3/2} + C_3\varepsilon E^2 + C_{Res}E^{1/2}$$

$$\le (C_1 + C_{Res})E + C_2\varepsilon^{1/2}E^{3/2} + C_3\varepsilon E^2 + C_{Res}$$

$$\le (C_1 + C_{Res} + 1)E + C_{Res}.$$

falls ε so klein, dass

$$C_2 \varepsilon^{1/2} E^{1/2} + C_3 \varepsilon E \leq 1$$

(beachte $E/_{T=0} = 0$).

$$\overset{\text{Gronwall}}{\Longrightarrow} \quad E(T) \leq C_{Res}\, e^{(C_1 + C_{Res} + 1)T} \leq C_{Res}\, e^{(C_1 + C_{Res} + 1)T_0} =: M.$$

Wähle ε_0, sodass $C_2 \varepsilon_0^{1/2} M^{1/2} + C_3 \varepsilon M \leq 1$

$$\Rightarrow \sup_{t \in [0, T_0/\varepsilon^2]} E(t) \leq M \quad (\text{unabh. von } \varepsilon)$$

$$\Rightarrow \sup_{t \in [0, T_0/\varepsilon^2]} \| R(\cdot, t) \|_{H^1} \leq M^{1/2}.$$

Für höhere Sobolevnormen: ersetze R in E durch $\partial_x^m R$ und argumentiere analog.

2. Beweismethode: mit Hilfe der Variation-der-Konstanten Formel.

Fouriertransformation der Fehlergleichung liefert:

$$\partial_t^2 \hat{R} = -\omega^2 \hat{R} - 3\varepsilon^2 \hat{\varphi}_n^{*2} * \hat{R} - 3\varepsilon^{\beta+1} \hat{\varphi}_n * \hat{R}^{*2} - \varepsilon^{2\beta} \hat{R}^{*3}$$
$$+ \varepsilon^{-\beta} \widehat{Res(\varepsilon \varphi_n)}$$

mit $\omega(k) = \sqrt{k^2 + 1}$. Umschreiben als System 1. Ordnung bzgl. ∂_t:

$$\partial_t \hat{R}_1 = i\omega \hat{R}_2$$
$$\partial_t \hat{R}_2 = i\omega \hat{R}_1 + \varepsilon^2 \hat{f}$$

mit $\hat{f} = \frac{1}{i\omega} \left(-3\hat{\varphi}^{*2} * \hat{R} - 3\varepsilon^{\beta-1} \hat{\varphi} * \hat{R}^{*2} - \varepsilon^{2\beta-2} \hat{R}^{*3} - \varepsilon^{-\beta-2} \widehat{Res(\varepsilon \hat{\varphi})} \right).$

Kurzschreibweise:

$$\partial_t \hat{\mathcal{R}}(k,t) = \Lambda(k) \hat{\mathcal{R}}(k,t) + \varepsilon^2 \hat{F}(k,t) \quad , \quad \hat{\mathcal{R}}(k,t) = \begin{pmatrix} \hat{R}_1(k,t) \\ \hat{R}_2(k,t) \end{pmatrix}$$

mit $\Lambda(k) = \begin{pmatrix} 0 & i\omega(k) \\ i\omega(k) & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{F}(k,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{f}(k,t) \end{pmatrix}.$

Verwende zur Abschätzung des Systems die Var. d. Konst. Formel

$$\hat{\mathcal{R}}(k,t) = e^{\Lambda(k)t}\,\hat{\mathcal{R}}(k,0) + \varepsilon^2 \int_0^t e^{\Lambda(k)(t-\tau)}\,\hat{F}(k,\tau)\,d\tau.$$