Modulationsgleichungen Vorlesung 5 Di, 19.04.2016

$$\partial_t \hat{\mathcal{R}}(k,t) = \Lambda(k)\, \hat{\mathcal{R}}(k,t) + \varepsilon^2 \hat{F}(k,t)$$

$$\hat{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} \hat{R}_1 \\ \hat{R}_2 \end{pmatrix}, \quad \hat{R}_1 = \hat{R}, \quad \hat{R}_2 = \frac{1}{i\omega}\partial_t \hat{R}$$

$$\Lambda(k) = \begin{pmatrix} 0 & i\omega(k) \\ i\omega(k) & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{F}(k,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{f}(k,t) \end{pmatrix},$$

$$\hat{f} = \frac{1}{i\omega}\left(-3\hat{\psi}^{*2} * \hat{R} - 3\varepsilon^{\beta-1}\hat{\psi} * \hat{R}^2 - \varepsilon^{2\beta-2}\hat{R}^{*3} + \varepsilon^{-\beta-2}\widehat{Res(\varepsilon\psi)}\right),$$

$$\omega(k) = \sqrt{k^2+1},$$

$$\hat{\mathcal{R}}(k,t) = e^{\Lambda(k)t}\hat{\mathcal{R}}(k,0) + \varepsilon^2\int_0^t e^{\Lambda(k)(t-\tau)}\hat{F}(k,\tau)\,d\tau.$$

[Existenz der HG über S.v. Lumer-Phillips]

Es gilt:

$$\exists C>0: \sup_{t\in\mathbb{R}} \| e^{\Lambda t}\|_{H^0_\theta \to H^0_\theta} \leq C$$

Denn es ist: $\left(\|f\|_{H^m_\theta} = \| f(\cdot)(1+\cdot^2)^{\theta/2}\|_{H^m} \right)$

$$\Lambda(k) = S\, D(k)\, S^{-1} \text{ mit}$$

$$D(k) = \begin{pmatrix} i\omega(k) & 0 \\ 0 & -i\omega(k) \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{\Lambda(k)t} = S e^{D(k)t} S^{-1} = S \begin{pmatrix} e^{i\omega(k)t} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega(k)t} \end{pmatrix} S^{-1}$$

$$\Rightarrow \| e^{\Lambda(k)t}\hat{u}\|_{H^0_\theta} \leq \sup_{k\in\mathbb{R}} \| e^{\Lambda(k)t}\|_{\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2} \|\hat{u}\|_{H^0_\theta},$$

wobei

$$\sup_{k\in\mathbb{R}} \| e^{\Lambda(k)t}\|_{\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2} \leq \|S\|_{\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2} \cdot \underbrace{\sup_{k\in\mathbb{R}} \| e^{D(k)t}\|_{\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2}}_{=1} \cdot \|S^{-1}\|_{\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2}$$

$$\leq \|S\|_{\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2} \cdot \|S^{-1}\|_{\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2} < \infty.$$

Außerdem gilt: $\forall \theta \geq 1\ \exists C > 0\ \forall \varepsilon \in (0,1]$:

$$\|\hat{F}\|_{H^0_\theta} \leq C\left(\|\hat{R}\|_{H^0_\theta} + \varepsilon^{\beta-1}\|\hat{R}\|^2_{H^0_\theta} + \varepsilon^{2\beta-2}\|\hat{R}\|^3_{H^0_\theta} + 1\right)$$

Dies folgt aus:

$$\left\|\tfrac{1}{\omega}\hat{g}\right\|_{H^0_\theta} \leq \|\hat{g}\|_{H^0_\theta},$$

$$\|\hat{\psi}^{*2} * \hat{R}\|_{H^0_\theta} \leq C\,\|\hat{\psi}\|^2_{L^1_\theta}\,\|\hat{R}\|_{H^0_\theta} \leq C(\psi)\,\|\hat{R}\|_{H^0_\theta},$$

Youngsche Ungleichung für Faltungen

$$\|\hat{\psi} * \hat{R}^{*2}\|_{H^0_\theta} \leq C\,\|\hat{\psi}\|_{L^1_\theta}\,\|\hat{R}\|^2_{H^0_\theta},$$

Young-Ungl., Sobolevscher Einbettungssatz

$$\|\hat{R}^{*3}\|_{H^0_\theta} \leq C\,\|\hat{R}\|^3_{H^0_\theta},$$ [siehe Aufg. 3.1 b.)]

$$\|\varepsilon^{-\beta}\,\widehat{Res(\varepsilon\psi)}\|_{H^0_\theta} \leq C,$$

$$\begin{aligned}
\|\hat{\psi}\|_{L^1_\theta} &= 2\left\|\tfrac{1}{\varepsilon}A\left(\tfrac{\cdot - k_0}{\varepsilon}\right) + h.o.t.\right\|_{L^1_\theta} \\
&\leq C\left\|\tfrac{1}{\varepsilon}\hat{A}\left(\tfrac{\cdot - k_0}{\varepsilon}\right)\right\|_{L^1_\theta} + h.o.t. \\
&\leq C\,\|\hat{A}\|_{L^1_\theta} + h.o.t. \\
&\leq C\,\|\hat{A}\|_{H^0_{\theta+1}} + h.o.t.
\end{aligned}$$

(Beachte: $\|\hat{\psi}\|_{H^0_\theta} = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1/2})$, daher wird $\hat{\psi}$ in der L^1_θ-Norm (bzw. ψ in der C^θ_b-Norm) abgeschätzt.)

Daher erhalten wir

$$\|\hat{R}(t)\|_{H^0_\theta} \le C\varepsilon^2 \int_0^t \Big(\|\hat{R}(\tau)\|_{H^0_\theta} + \varepsilon^{\beta-1} \|\hat{R}(\tau)\|^2_{H^0_\theta} + \varepsilon^{2\beta-2} \|\hat{R}(\tau)\|^3_{H^0_\theta} + 1 \Big) \, d\tau$$

$$\le C\varepsilon^2 \int_0^t \|\hat{R}(\tau)\|_{H^0_\theta} + 2 \, d\tau$$

$$\le 2CT_0 + C\varepsilon^2 \int_0^t \|\hat{R}(\tau)\|_{H^0_\theta} \, d\tau ,$$

solange

$$\varepsilon^{\beta-1} \|\hat{R}(\tau)\|^2_{H^0_\theta} + \varepsilon^{2\beta-2} \|\hat{R}(\tau)\|^3_{H^0_\theta} \le 1 .$$

Die Gronwallsche Ungleichung (Integralform) liefert nun:

$$\|\hat{R}(t)\|_{H^0_\theta} \le 2CT_0 e^{2C\varepsilon^2 t} \le 2CT_0 e^{CT_0} =: M \quad \text{f.a. } t \in [0, T_0/\varepsilon^2].$$

Wähle $\varepsilon_0 > 0$, so dass $\varepsilon_0^{\beta-1} M^2 + \varepsilon_0^{2\beta-2} M^3 \le 1$ und erhalte die gewünschte Fehlerabschätzung. $\square$

<u>Bem.:</u> Wir haben die lokale Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen der nichtlinearen Wellengleichung mit $N(u) = u^3$ sowie der zugehörigen Fehlergleichung in denselben Räumen, die wir für die Fehlerabschätzung verwendet haben: Sei $\theta \ge 1$ und $(u_0, u_1) \in H^{\theta+1} \times H^\theta$. Dann $\exists\, t_0 > 0$, sodass die nichtlineare Wellengleichung eine Lösung $u \in C([-t_0, t_0], H^{\theta+1})$ mit $u|_{t=0} = u_0$, $\partial_x u|_{t=0} = u_1$ besitzt. Zum Beweis nutzt man die Darstellungsformel

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big(u_0(x+t) + u_0(x-t)\big) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u_1(\xi)\, d\xi + \int_0^t \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} f(y,s)\, dy\, ds$$

mit

$$f(x,t) = -u(x,t) - u(x,t)^3 ,$$

welche auf der Lösungsformel für die inhomogene Wellengleichung basiert.
Für hinreichend kleines $t_0 > 0$ ist die rechte Seite eine Kontraktion in $C([-t_0, t_0], H^{\theta+1})$.

$\overset{\text{Banachscher FPS}}{\Longrightarrow}$ Existenz einer klass. Lösung.

Die Lösung existiert, solange die $H^{\theta+1}$-Norm beschränkt bleibt. Nutzt man die Fehlerabschätzungen als a priori-Abschätzungen, dann folgt, dass die Lösung für $t \in [0, T_0/\varepsilon^2]$ in $H^{\theta+1}$ beschränkt bleibt, so dass die iterierte Anwendung der lokalen Ex. und Eind. die Ex. und Eind. für $t \in [0, T_0/\varepsilon^2]$ liefert.