Die Lösung ex., solange die $H^{\theta+1}$-Norm beschränkt bleibt. Nutzt man die Fehlerabsch. als a priori-Absch., dann folgt, dass die Lösung für $t \in [0, T_0/\varepsilon^2]$ in $H^{\theta+1}$ beschr. bleibt, so dass die iterierte Anwendung der lokalen Ex. und Eindeutigkeit die Ex. und Eindeutigkeit für $t \in [0, T_0/\varepsilon^2]$ liefert. (wie bei NLS)

21.4.16

## Allgemeine Struktur dispersiver Sys., für die die NLS-Gl. als Approxgl. herleitbar ist:

Bei der nichtlin. Wellengl.

$$\partial_t^2 u = \partial_x^2 u - u + u^3$$

hatten wir gesehen, dass diese Gl. nach Umschreiben in ein Sys. 1. Ordnung bzgl. der Zeitabl. und Diagonalisierung des Linearteils von folgender Form ist

$$\partial_t \hat{z} = \hat{\Lambda}\hat{z} + \hat{S}^* \hat{N}(\hat{S}\hat{z})$$

mit $\hat{z}(k) = \hat{S}^* \begin{pmatrix} \hat{u}(k) \\ 1/i\omega(k)\, \partial_t \hat{u}(k) \end{pmatrix}$, $\hat{S} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\hat{S}^* = \hat{S}^{-1}$,

sgn(k): bildet reelles auf reelles ab

wie 1.Abl. für gspek $\omega(k) = \sqrt{k^2+1}$, $\hat{\Lambda}(k) = \begin{pmatrix} i\omega(k) & 0 \\ 0 & -i\omega(k) \end{pmatrix}$, ~~$\hat{\Omega}(k) =$~~

$$\hat{N}(\hat{S}\hat{z})(k) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/i\omega(k)\, \hat{u}^{*3}(k) \end{pmatrix}.$$

Dies ist ein Spezialfall des allgemeineren Systems

$$\partial_t U = LU + N_2(U,U) + N_3(U,U,U) + \ldots,$$

wobei

$L$ lin, schiefsym, ortsunabh.
(hängt nur über $U$ von $x$ ab)
$N_j$ $j$-lin, ortsunabh., o.B.d.A. sym. bzgl. ihrer Argumente.

Aufgrund der Ortsinvarianz besitzt die Linearisierung bzgl. der trivialen Lösung $U \equiv 0$, also $\partial_t U = LU$, Lösungen der Form

$$U(x,t) = \underbrace{f_n(k)e^{ikx}}_{\text{Eigenfkt der Matrix}} e^{i\omega_n(k)t},$$

$k \in \mathbb{R},\ n \in I \subseteq \mathbb{Z}$.

Für festes $k$ seien die $\omega_n$ so geordnet, dass $\omega_n \leq \omega_{n+1}$.

Für reellwertige Systeme nehmen wir $\omega_n = -\omega_{-n}$ an.

Nach der Entwicklung

$$U(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n \in I} c_n(k,t) f_n(k) e^{ikx}\, dk$$

bzgl. der Eigenfunktionen, erfüllen die Koeff. $c_n$

$$\partial_t c_n(k,t) = i\omega_n(k) c_n(k,t)$$

$$+ \sum_{n_1,n_2 \in I} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{s_{2\,n,n_1,n_2}(k,k-\ell,\ell)}_{\in \mathbb{C}} c_{n_1}(k-\ell) c_{n_2}(\ell)\, d\ell$$

$$+ \sum_{n_1,n_2,n_3 \in I} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{s_{3\,n,n_1,n_2,n_3}(k,k-\ell,\ell-m,m)}_{\in \mathbb{C}} c_{n_1}(k-\ell) c_{n_2}(\ell-m) c_{3}(m)\, d\ell\, dm$$

$$+ \ldots$$

zB gilt:

$$s_{2\,n,n_1,n_2}(k,k-\ell,\ell) = \langle f_n^*(k), e^{-ikx} N_2(f_{n_1}(k-\ell)e^{i(k-\ell)x}, f_{n_2}(\ell)e^{i\ell x})\rangle_{L^2},$$

wobei $f_n^*(k)$ die Adjungierte von $f_n(k)$ bzgl. $\langle \cdot,\cdot \rangle_{L^2}$ ist.

Für die Herleitung der NLS-Gl. schauen wir zur Illustration zunächst wieder die diagonalisierte Version der nichtlin. Wellengl. an. Wir machen den Ansatz

$$\hat{z}(k,t) = \varepsilon\, \varepsilon^{-1} \hat{A}_1\left(\frac{k-k_0}{\varepsilon}, \varepsilon^2 t\right) e^{i\omega(k_0)t} e^{ic_g(k-k_0)t} \underline{e}_1 \quad \text{''}\binom{\hat{\ }}{0}\text{''}$$

$$+ \varepsilon\, \varepsilon^{-1} \hat{A}_{-1}\left(\frac{k+k_0}{\varepsilon}, \varepsilon^2 t\right) e^{-i\omega(k_0)t} e^{ic_g(k+k_0)t} \underline{e}_2$$

langwell. Ansatz $A(\varepsilon x)e^{ikx}$ $\hat{=}$ $\frac{1}{\varepsilon}\hat{A}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)$ Trans.

Betrachte zunächst nur den Anteil von $\hat{A}_1$:

Einsetzen in das ursprüngliche System liefert

$$i\omega(k_0)\hat{A}_1 + i\varepsilon c_g K \hat{A}_1 + \varepsilon^2 \partial_T \hat{A}_1$$

sollte $\neq 0$ sein, sonst keine Dispersion

$$\overset{\text{Taylor}}{=} i\omega(k_0)\hat{A}_1 + i\varepsilon\, \partial_k\omega(k_0) K\hat{A}_1 + \frac{i}{2}\varepsilon^2 \partial_k^2 \omega(k_0) \underbrace{K^2 \hat{A}_1}_{2.\text{Abl.}}$$

$$+ \varepsilon^2 \frac{3i}{4\omega(k_0)} \hat{A}_1 * \hat{A}_1 * \hat{A}_1 + O(\varepsilon^3),$$

mit $k = k_0 + \varepsilon K$, $T = \varepsilon^{-2} t$, wegen

$$\int \hat{A}\left(\frac{k-\ell-k_0}{\varepsilon}\right) e^{i\omega(k_0)t} e^{ic_g(k-\ell-k_0)t} \hat{A}\left(\frac{\ell-k_0}{\varepsilon}\right) e^{i\omega(k_0)t} e^{ic_g(\ell-k_0)t} \, d\ell$$

$$= \varepsilon \int \hat{A}\left(\frac{k-2k_0}{\varepsilon} - m\right) \hat{A}(m) e^{2i\omega(k_0)t} e^{ic_g(k-2k_0)t} \, dm$$

$\varepsilon$-Balancen:

$\varepsilon^0$: $i\omega(k_0) = i\omega(k_0)$ ✓ (haben Dispersionsrel. in Ansatz eingesetzt)

$\varepsilon^1$: $c_g = \partial_k \omega(k_0)$

$\varepsilon^2$ NLS-Gl.

Analog für den Anteil mit $\hat{A}_{-1}$.

Rücktransformation auf $\hat{u}$ liefert

$$\hat{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \hat{A}_1\left(\frac{k-k_0}{\varepsilon}, \varepsilon^2 t\right) e^{i\omega(k_0)t} e^{ic_g(k-k_0)t} + \hat{A}_{-1}\left(\frac{k+k_0}{\varepsilon}, \varepsilon^2 t\right) e^{-i\omega(k_0)t} e^{ic_g(k+k_0)t} \right).$$

Im allgemeinen reellwertigen Fall haben wir folgende Situation:

Wir machen den Ansatz:

$$\begin{aligned} c_1(k,t) = {} & \hat{A}_{1,1}(\varepsilon^{-1}(k-k_0), \varepsilon^2 t) e^{i\omega(k_0)t} e^{ic_g(k-k_0)t} \\ & + \varepsilon \hat{A}_{1,-2}(\varepsilon^{-1}(k+2k_0), \varepsilon^2 t) e^{-2i\omega(k_0)t} e^{ic_g(k+2k_0)t} \\ & + \varepsilon \hat{A}_{1,2}(\varepsilon^{-1}(k-2k_0), \varepsilon^2 t) e^{+2i\omega(k_0)t} e^{ic_g(k-2k_0)t} \\ & + \varepsilon \hat{A}_{1,0}(\varepsilon^{-1} k, \varepsilon^2 t) e^{ic_g k t} \end{aligned}$$

wie um 0 konz.

$$\begin{aligned} c_{-1}(k,t) = {} & \hat{A}_{-1,-1}(\varepsilon^{-1}(k+k_0), \varepsilon^2 t) e^{-i\omega(k_0)t} e^{ic_g(k+k_0)t} \\ & + \varepsilon \hat{A}_{-1,-2}(\varepsilon^{-1}(k+2k_0), \varepsilon^2 t) e^{-2i\omega(k_0)t} e^{ic_g(k+2k_0)t} \\ & + \varepsilon \hat{A}_{-1,2}(\varepsilon^{-1}(k-2k_0), \varepsilon^2 t) e^{2i\omega(k_0)t} e^{ic_g(k-2k_0)t} \\ & + \varepsilon \hat{A}_{-1,0}(\varepsilon^{-1} k, \varepsilon^2 t) e^{ic_g k t} \end{aligned}$$

$\forall |n| \geq 2$:

$$\begin{aligned} c_n(k,t) = {} & \varepsilon \hat{A}_{n,-2}(\varepsilon^{-1}(k+2k_0), \varepsilon^2 t) e^{-2i\omega(k_0)t} e^{ic_g(k+2k_0)t} \\ & + \varepsilon \hat{A}_{n,2}(\varepsilon^{-1}(k-2k_0), \varepsilon^2 t) e^{2i\omega(k_0)t} e^{ic_g(k-2k_0)t} \\ & + \varepsilon \hat{A}_{n,0}(\varepsilon^{-1} k, \varepsilon^2 t) e^{ic_g k t} \end{aligned}$$

mit $A_{n,j} = \overline{A_{n,j}}$, $\hat{A}_{n,j} \in \mathbb{C}$, $\omega = \omega_1$.

Einsetzen in das System und Balance der $\varepsilon^k$-Terme liefert:

$\varepsilon^0$: $i\,\omega_1(k_0) = i\,\omega_1(k_0)$

$\varepsilon^1$: $c_g = \partial_k \omega_1(k_0)$

$$\varepsilon^2 \cdot e^{i\omega(k_0)t}: \partial_T \hat{A}_{1,1}(K,T) = i\,\partial_k^2 \omega_1(k_0) \frac{K^2}{2} \hat{A}_{1,1}(K,T)$$
$$+2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} s_{2,1,1,n}(k_0,k_0,0) \int_{-\infty}^{\infty} \hat{A}_{1,1}(K-k,T)\,\hat{A}_{n,0}(k,T)\,dk$$

Summe über I, ggf. Nullkoeff.

führt im Bsp. auf alg. Gl., Nichtresonanzbed. erf.

$$+2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} s_{2,1,1,n}(k_0,-k_0,2k_0) \int_{-\infty}^{\infty} \hat{A}_{1,-1}(K-k,T)\,\hat{A}_{n,2}(k,T)\,dk$$
$$+3\, s_{3,1,1,1,1}(k_0,k_0,k_0,-k_0) \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{A}_{1,1}(K-k_1,T)\,\hat{A}_{1,1}(k_1-k_2,T)\,\hat{A}_{1,-1}(k_2,T)\,dk_2\,dk_1,$$

wobei wir die Symmetrie der j-lin. Terme ausgenutzt haben.

$$\varepsilon^2: \quad i\omega_n(0) A_{n,0}(K,T) + 2 s_{2n,1,-1}(0,-k_0,k_0) \int_{-\infty}^{\infty} \hat{A}_{1,-1}(K-k,T)\,\hat{A}_{1,1}(k,T)\,dk = 0$$

$$\varepsilon^2 \cdot e^{2i\omega(k_0)}: \quad i(\omega_n(2k_0) - 2\omega_1(k_0)) A_{n,2}(K,T)$$
$$+2 s_{2n,1,1}(2k_0,k_0,k_0) \int_{-\infty}^{\infty} \hat{A}_{1,1}(K-k,T)\,\hat{A}_{1,1}(k,T)\,dk = 0$$

Sind die Nichtresonanzbed. $\omega_n(0) \neq 0$ und $\omega_n(2k_0) - 2\omega_1(k_0) \neq 0$ erfüllt, dann lassen sich ~~die Terme~~ $A_{n,0}, A_{n,2}$ eindeutig in Termen von $A_{1,1}$ und $A_{1,-1}$ ausdrücken, so dass sich schließlich für $A_{1,1}$ die (Fouriertransf.) NLS-Gl.

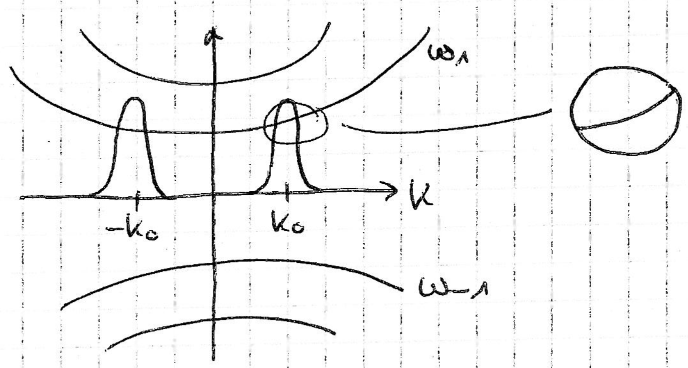
$$\partial_T \hat{A}_{1,1}(K,T) = i\nu_1 K^2 \hat{A}_{1,1}(K,T)$$
$$+ i\nu_2 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{A}_{1,1}(K-k,T)\,\hat{A}_{1,1}(k-\tilde{k},T)\,\hat{A}_{1,-1}(\tilde{k},T)\,d\tilde{k}\,dk$$

fok. oder defok.; wichtig dass explizit bestimmbar

mit $\nu_1 = -\frac{\partial_k^2 \omega_1(k_0)}{2}$, $\cancel{\nu_2 = 4\sum_{n\in\mathbb{Z}} s_2}$

$$\nu_2 = 4 \sum_{n\in\mathbb{Z}} s_{2,1,1,n}(k_0,k_0,0)\, s_{2n,1,-1}(0,-k_0,k_0) / \omega_n(0)$$
$$+2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} s_{2,1,1,n}(k_0,-k_0,2k_0)\, s_{2,n,1,1}(2k_0,k_0,k_0) / \omega_n(2k_0)$$
$$-3 \sum s_{3,1,1,1,1}(k_0,k_0,-k_0)$$

ergibt.




Taylorentw. der Dispersionsgl.

FR: Pseudodiff. Op, FPU, Quantengraphen

normale Diff.op. auch im Ortsraum

$\boxed{\text{2. Fall}}$: $N(u) = u^2$ 26.4.16

Wir betrachten also

$$\partial_t^2 u = \partial_x^2 u - u + u^2$$

mit $x, t, u(x,t) \in \mathbb{R}$. Wir machen den Ansatz

Welle läuft nach rechts, mit − nach links

$$\begin{aligned}\varepsilon \Psi_{NLS} = {} & \varepsilon A_1(\varepsilon(x - c_g t), \varepsilon^2 t) e^{i(k_0 x + \omega_0 t)} + c.c. \\ & + \varepsilon^2 A_2(\varepsilon(x - c_g t), \varepsilon^2 t) e^{2i(k_0 x + \omega_0 t)} + c.c. \\ & + \varepsilon^2 A_0(\varepsilon(x - c_g t), \varepsilon^2 t).\end{aligned}$$

$\varepsilon$-Balancen:

$\varepsilon e^{i(k_0 x + \omega_0 t)}$: $\omega_0 = \pm\sqrt{1 + k_0^2}$

$\varepsilon^2 e^{i(k_0 x + \omega_0 t)}$: $c_g = \pm \partial_k \omega(k_0)$

$\varepsilon^3 e^{i(k_0 x + \omega_0 t)}$: $2i\omega_0 \partial_T A_1 = (1 - c_g^2)\partial_X^2 A_1 + 2A_1 A_0 + 2 A_2 A_{-1}$

$X = \varepsilon(x - c_g t)$, $T = \varepsilon^2 t$

$\varepsilon^2 e^0$: $0 = -A_0 + 2 A_1 A_{-1}$

$\varepsilon^2 e^{2i(k_0 x + \omega_0 t)}$: $0 = -\underbrace{(-4\omega_0^2 + 4k_0^2 + 1)}_{\neq 0} A_2 + A_1^2$

$$\Rightarrow A_0 = 2|A_1|^2$$

$$A_2 = \frac{1}{-4\omega_0^2 + 4k_0^2 + 1} A_1^2$$

Einsetzen in die NLS-Gl. liefert: