MGl. Vorlesung 7 Di, 26.04.2016

2. Fall: $N(u) = u^2$.

Wir betrachten also $\partial_t^2 u = \partial_x^2 u - u + u^2$ mit $x, t, u(x,t) \in \mathbb{R}$. Wir machen den Ansatz

$$\varepsilon \psi_{NLS} = \varepsilon A_1(\varepsilon(x-c_g t), \varepsilon^2 t) e^{i(k_0 x + \omega_0 t)} + c.c.$$
$$+ \varepsilon^2 A_2(\varepsilon(x-c_g t), \varepsilon^2 t) e^{2i(k_0 x + \omega_0 t)} + c.c.$$
$$+ \varepsilon^2 A_0(\varepsilon(x-c_g t), \varepsilon^2 t).$$

ε-Balance liefert:

$\varepsilon e^{i(k_0 x + \omega_0 t)}$: $\quad \omega_0 = \pm\sqrt{1+k_0^2}$

$\varepsilon^2 e^{i(k_0 x + \omega_0 t)}$: $\quad c_g = \pm \partial_k \omega(k_0)$

$\varepsilon^3 e^{i(k_0 x + \omega_0 t)}$: $\quad 2i\omega_0 \partial_T A_1 = (1-c_g^2)\partial_X^2 A_1 + 2A_1A_0 + 2A_2A_{-1}$,

wobei $X = \varepsilon(x-c_g t)$, $T = \varepsilon^2 t$

$\varepsilon^2 e^0$: $\quad 0 = -A_0 + 2A_1A_{-1} \quad \Longrightarrow \quad A_0 = 2|A_1|^2$

$\varepsilon^2 e^{2i(k_0 x + \omega_0 t)}$: $\quad 0 = -\underbrace{(-4\omega_0^2 + 4k_0^2 + 1)}_{\neq 0} A_2 + A_1^2$

$$\Longrightarrow A_2 = \frac{1}{-4\omega_0^2 + 4k_0^2 + 1} A_1^2$$

Einsetzen in die NLS-Gleichung liefert:

$$\partial_T A_1 = -i\frac{(1-c_g^2)}{2\omega_0}\partial_X^2 A_1 - i\frac{\gamma}{2\omega_0} A_1|A_1|^2$$

mit $\gamma = 4 + \dfrac{2}{-4\omega_0^2 + 4k_0^2 + 1}$.

Wie im kubischen Fall kann durch Hinzunahme von Korrekturtermen von höherer ε-Potenz das Residuum

$$Res(\varepsilon\psi_{NLS}) = -\partial_t^2(\varepsilon\psi) + \partial_x^2(\varepsilon\psi) - (\varepsilon\psi) + (\varepsilon\psi)^2$$

2016年04月26日

beliebig klein gemacht werden.

Proposition 1.2.4:

Für alle $n\in\mathbb{N}$ und $\theta\geq 1$ gilt: Für $A\in C([0,T_0],H^{\theta_A})$ mit $\theta_A=3(n-3)+1+\theta$ und $\varepsilon_0\in(0,1]$ existiert ein $C>0$, so dass es für alle $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ eine Approximation $\varepsilon\psi_n$ gibt mit

$$\sup_{t\in[0,T_0/\varepsilon^2]} \|Res(\varepsilon\psi_n(t))\|_{H^\theta}\leq C\varepsilon^{n-1/2},$$

$$\sup_{t\in[0,T_0/\varepsilon^2]} \|\varepsilon\psi_{NLS}(t)-\varepsilon\psi_n(t)\|_{C_b^0}\leq C\varepsilon^2. \quad \boxtimes$$

[Beweis analog zum „u^3" Fall (Fall 1)]

Sei $\beta=n-\frac{5}{2}$ und $\varepsilon^\beta R=u-\varepsilon\psi_n$. Dann gilt:

$$\partial_t^2 R=\partial_x^2 R-R+2\varepsilon\psi_n R+\varepsilon^\beta R^2+\varepsilon^{-\beta}Res(\varepsilon\psi)$$

$$\Rightarrow \partial_t\hat{R}_1=i\omega\hat{R}_2$$
$$\partial_t\hat{R}_2=i\omega\hat{R}_1+\frac{1}{i\omega}\left(2\varepsilon\hat{\psi}_n*\hat{R}_1+\varepsilon^\beta\hat{R}_1^{*2}+\varepsilon^{-\beta}\widehat{Res(\varepsilon\psi_n)}\right)$$

mit $\omega(k)=\sqrt{k^2+1}$. Der Term $2\varepsilon\psi_n R$ ist von $\mathcal{O}(\varepsilon)$ und kann daher nicht direkt auf einer Zeitskala der Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^{-2})$ abgeschätzt werden.

Idee: Elimination dieses Terms mit Hilfe einer Normalformtransformation (Shatah, Kalyakin).

Definiere für ein System der Form

$$\partial_t u=Au+N_Q(u)+N_C(u),$$

wobei $N_Q(u)$ quadratisch in u ist und $N_C(u)$ aus nichtlinearen Termen höherer Ordnung (z.B. kubisch in u) besteht, eine Koordinatentransformation der Form

$$v=u-K(u),$$

um $N_Q(u)$ zu eliminieren und in einen Term höherer Ordnung zu verwandeln.

Dabei gilt:

2016年04月26日

$$\partial_t v = \partial_t u - K'(u)\cdot \partial_t u$$
$$= Au + N_Q(u) + N_C(u) - K'(u)Au - K'(u)N_Q(u) - K'(u)N_C(u)$$
$$= Av + AK(u) - K'(u)Au + N_Q(u) + N_C(u) - K'(u)N_Q(u) - K'(u)N_C(u).$$

Um $N_Q(u)$ zu eliminieren, wählt man (wenn möglich) K so, dass
$$AK(u) - K'(u)Au + N_Q(u) = 0$$
gilt.

<u>Bsp.:</u> $\quad \partial_t u = -i\Delta u + i\langle \nabla u, \nabla u\rangle.$

Sei $v = u - \frac{1}{2}u^2$, also $K(u) = \frac{1}{2}u^2$.

$$\Rightarrow AK(u) - K'(u)Au + N_Q(u) = -i\Delta\left(\tfrac{1}{2}u^2\right) - u(-i\Delta u) + i\langle\nabla u, \nabla u\rangle$$
$$= 0.$$

$$\Rightarrow \partial_t v = -i\Delta u - ui\langle \nabla u, \nabla u\rangle$$

[um die rechte Seite in v ausdrücken zu können, muss die TF inv.bar sein → z.B. IFS]

Um eine Evolutionsgleichung für v zu erhalten muss die NFT noch invertiert werden, also u in Termen von v ausgedrückt werden.

Anwendung auf die nichtlineare Wellengleichung:

Sei $\mathcal{R} = S^{-1}\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$, $\quad S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$,

$$\hat{\Psi}(k) = S^{-1}\begin{pmatrix} \hat{\psi}(k) \\ \frac{1}{i\omega(k)}\partial_t \hat{\psi}(k) \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \partial_t \mathcal{R} = \Lambda\mathcal{R} + 2\varepsilon B(\Psi, \mathcal{R}) + \varepsilon^{\beta} B(\mathcal{R}, \mathcal{R}) + \varepsilon^{-\beta} RES(\varepsilon\Psi)$$

mit $\hat{\Lambda} = \begin{pmatrix} i\omega & 0 \\ 0 & -i\omega \end{pmatrix}$, $\quad \hat{B}(\hat{U}, \hat{V}) = \frac{1}{i\omega} S^{-1}\tilde{B}(S\hat{U}, S\hat{V})$,

$\tilde{B}(\hat{U}, \hat{V}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{u}_1 * \hat{v}_1 \end{pmatrix}$, $\quad \hat{U} = \begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{pmatrix}$, $\quad \hat{V} = \begin{pmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \end{pmatrix}$, $\quad RES(\varepsilon\Psi) = S^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ Res(\varepsilon\Psi) \end{pmatrix}.$

2016年04月26日

Ansatz für die NFT:

$$\omega = \mathcal{R} + \varepsilon Q(\Psi, \mathcal{R}),$$

wobei Q eine autonome bilineare Abbildung ist.

$$\Rightarrow \partial_t \omega = \partial_t \mathcal{R} + \varepsilon Q(\partial_t \Psi, \mathcal{R}) + \varepsilon Q(\Psi, \partial_t \mathcal{R})$$

$$= \Lambda \mathcal{R} + 2\varepsilon B(\Psi, \mathcal{R}) + \varepsilon^\beta B(\mathcal{R},\mathcal{R}) + \varepsilon^{-\beta} RES(\varepsilon\Psi) + \varepsilon Q(\partial_t \Psi, \mathcal{R})$$
$$+ \varepsilon Q(\Psi, \Lambda\mathcal{R} + 2\varepsilon B(\mathcal{R},\mathcal{R}) + \varepsilon^{-\beta} RES(\varepsilon\Psi))$$

$$= \Lambda\omega - \varepsilon\Lambda Q(\Psi,\mathcal{R}) + 2\varepsilon B(\Psi,\mathcal{R}) + \varepsilon^\beta B(\mathcal{R},\mathcal{R}) + \varepsilon^{-\beta} RES(\varepsilon\Psi)$$
$$+ \varepsilon Q(\partial_t\Psi,\mathcal{R}) + \varepsilon Q(\Psi, \Lambda\mathcal{R}) + 2\varepsilon^2 Q(\Psi, B(\mathcal{R},\mathcal{R}))$$
$$+ \varepsilon^{1+\beta} Q(\Psi, B(\mathcal{R},\mathcal{R})) + \varepsilon^{1-\beta} Q(\Psi, RES(\varepsilon\Psi))$$

$$\Rightarrow \partial_t\omega = \Lambda\omega + \varepsilon(-\Lambda Q(\Psi,\mathcal{R}) + Q(\Psi,\Lambda\mathcal{R}) + 2B(\Psi,\mathcal{R}) + Q(\partial_t\Psi,\mathcal{R}))$$
$$+ \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Wähle daher Q so, dass

$$\Lambda Q(\Psi,\mathcal{R}) - Q(\partial_t\Psi,\mathcal{R}) - Q(\Psi,\Lambda\mathcal{R}) = 2B(\Psi,\mathcal{R}) + \mathcal{O}(\varepsilon).$$