Modulationsgl. Vorlesung 8 Do. 28.04.2016

$$\partial_t^2 u = \partial_x^2 u - u \begin{cases} -u^3 \\ +u^2 \end{cases} \qquad u = \varepsilon \Psi + \varepsilon^{\beta} R$$

$$\mathcal{R} \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_t \hat{\mathcal{R}} = \underbrace{\begin{pmatrix} i\omega & 0 \\ 0 & -i\omega \end{pmatrix}}_{=:\Lambda} \hat{\mathcal{R}} + 2\varepsilon \hat{B}(\hat{\Psi}, \hat{\mathcal{R}}) + \dots$$

$$w = \mathcal{R} + \varepsilon Q(\Psi, \hat{\mathcal{R}})$$

Q bilinear $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\Rightarrow -\Lambda Q(\Psi, \mathcal{R}) + Q(\partial_t \Psi, \mathcal{R}) + Q(\Psi, \Lambda \mathcal{R}) + 2B(\Psi, \mathcal{R}) = \mathcal{O}(\varepsilon)$$

Wdh.

Diese Gleichung kann folgendermaßen vereinfacht werden. Es ist

$$\partial_t \Psi = \sqrt{2}\, \partial_t \begin{pmatrix} A_1(\varepsilon(x-c_g t), \varepsilon^2 t) e^{i(k_0 x + \omega_0 t)} + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ A_{-1}(\varepsilon(x-c_g t), \varepsilon^2 t) e^{-i(k_0 x + \omega_0 t)} + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{pmatrix}$$

$$= \sqrt{2} \begin{pmatrix} i\omega_0 A_1(\varepsilon(x-c_g t), \varepsilon^2 t) e^{i(k_0 x + \omega_0 t)} \\ -i\omega_0 A_{-1}(\varepsilon(x-c_g t), \varepsilon^2 t) e^{-i(k_0 x + \omega_0 t)} \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Somit können wir die Gleichung ersetzen durch:

$$-\Lambda Q(\Psi, \mathcal{R}) + Q\left(\begin{pmatrix} i\omega(k_0) & 0 \\ 0 & -i\omega(k_0) \end{pmatrix} \Psi, \mathcal{R} \right) + Q(\Psi, \Lambda \mathcal{R}) + 2B(\Psi, \mathcal{R}) = \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Im Fourierraum gilt:

$$(\hat{B}(\Psi, \hat{\mathcal{R}}))_j = \sum_{m,n=1}^{2} \int_{\mathbb{R}} \hat{b}^j_{mn}(k, k-\ell, \ell)\, \hat{\Psi}_m(k-\ell)\, \hat{\mathcal{R}}_n(\ell)\, d\ell, \qquad j \in \{1,2\},$$

$$(\hat{Q}(\hat{\Psi}, \hat{\mathcal{R}}))_j = \sum_{m,n=1}^{2} \int_{\mathbb{R}} \hat{q}^j_{mn}(k, k-\ell, \ell)\, \hat{\Psi}_m(k-\ell)\, \hat{\mathcal{R}}_n(\ell)\, d\ell.$$

Setzt man diese Darstellung in die obige Gleichung ein, dann ergibt sich:

$$i(\omega_j(k) - \omega_1(k_0) - \omega_n(\ell))\, \hat{q}^j_{1n}(k, k-\ell, \ell) = -2\, \hat{b}^j_{1n}(k, k-\ell, \ell) + \mathcal{O}(\varepsilon),$$

$$i(\omega_j(k) - \omega_2(-k_0) - \omega_n(\ell))\, \hat{q}^j_{2n}(k, k-\ell, \ell) = -2\, \hat{b}^j_{2n}(k, k-\ell, \ell) + \mathcal{O}(\varepsilon),$$

wobei $\omega_j = (-1)^{j+1}\omega$.

Bem.: Hätten wir das Beispiel

$$\partial_t u = -i\Delta u + i\langle \nabla u, \nabla u\rangle$$

im Fourierraum betrachtet, dann hätten wir die Gleichung

$$i(\omega(k) - \omega(k-\ell) - \omega(\ell))\, \hat{q}(k, k-\ell, \ell) = -\hat{b}(k, k-\ell, \ell)$$

mit

$$\omega(k) = -k^2, \quad \hat{b}(k, k-\ell, \ell) = -i(k-\ell)\ell$$

erhalten. Wegen

$$\omega(k) - \omega(k-\ell) - \omega(\ell) = -k^2 + (k-\ell)^2 + \ell^2 = -2(k-\ell)\ell$$

folgt

$$\hat{q}(k, k-\ell, \ell) = -\frac{1}{2}.$$

Weil

$$\Psi = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_{-1} \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

ist und $\hat{A}_{\pm 1}$ nur in der Nähe von $\pm k_0$ von $\mathcal{O}(1)$ ist, genügt es, die obigen Gleichungen nur für $|k-\ell \pm k_0| \leq \delta$ mit δ hinreichend klein, aber unabhängig von ε aufzulösen. Für alle anderen $k-\ell$ setzen wir

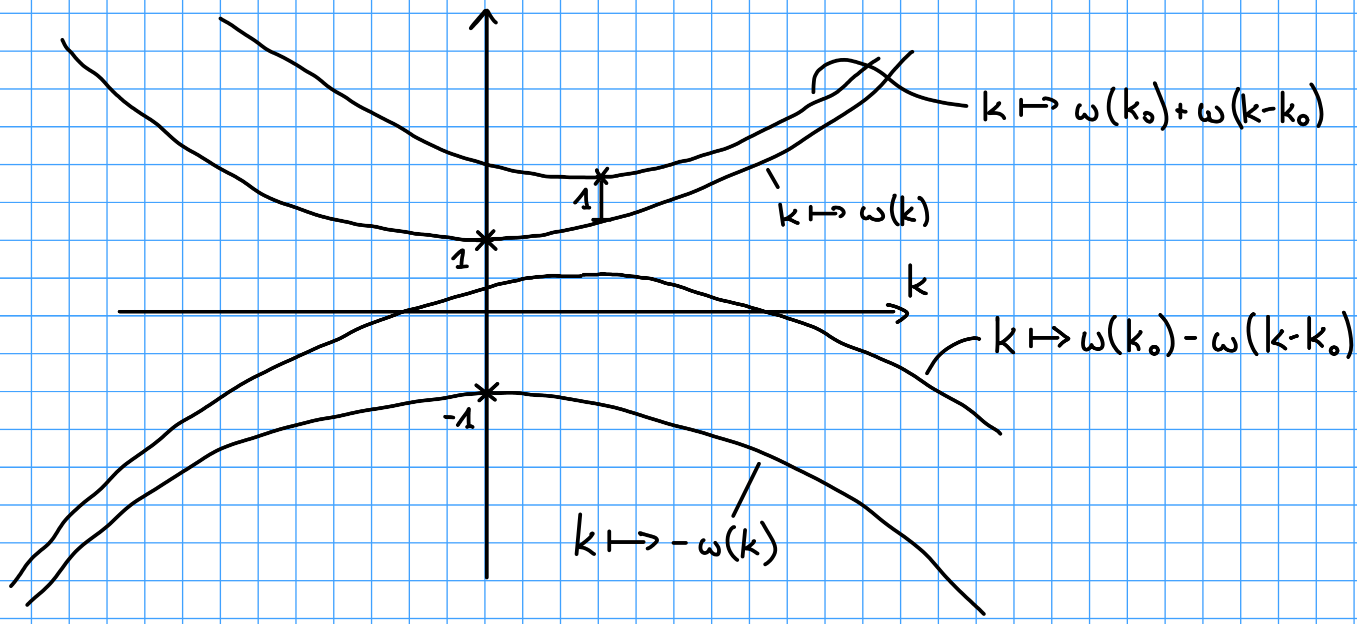
$$\hat{q}^j_{mn}(k, k-\ell, \ell) = 0.$$

Folglich benötigen wir zur Auflösung der Gleichungen nach $\hat{q}^j_{mn}$ die Gültigkeit der Nichtresonanzbedingungen (NRB)

$$\inf_{j,n \in \{1,2\}} \ \inf_{k,\ell,\, |k-\ell| \leq \delta} |(\omega_j(k) - \omega_1(k_0) - \omega_n(\ell))| \geq C > 0,$$

$$\inf_{j,n \in \{1,2\}} \ \inf_{k,\ell \in \mathbb{R},\, |k-\ell| \leq \delta} |(\omega_j(k) - \omega_2(-k_0) - \omega_n(\ell))| \geq C > 0,$$

für festes $\delta \ll 1$. Für unser $\omega(k) = \sqrt{k^2+1}$ sind die NRB erfüllt, wobei C von δ abhängt.



Wegen

$$\sup_{j,m,n\in\{1,2\}} \sup_{\substack{k,\ell\in\mathbb{R},\\ |k-\ell|<\delta}} \left| \hat{b}^j_{mn}(k, k-\ell, \ell)\right| < \infty$$

folgt dann auch

$$\sup_{j,m,n\in\{1,2\}} \sup_{\substack{k,\ell\in\mathbb{R},\\ |k-\ell|<\delta}} \left| \hat{q}^j_{mn}(k, k-\ell, \ell)\right| < \infty .$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \|Q(\Psi, \mathcal{R})\|_{H^\theta} &\leq \tilde{C}\, \|\Psi\|_{C^\theta_b} \|\mathcal{R}\|_{H^\theta} \\ &\leq \tilde{C}\, \|\hat{\Psi}\|_{L^1_\theta} \|\hat{\mathcal{R}}\|_{L^2_\theta}, \end{aligned}$$

und damit kann für hinreichend kleines ε die NFT mit Hilfe der Neumannschen Reihe invertiert werden. Damit erhalten wir

$$\partial_t \omega = \Lambda \omega + \varepsilon^2 F(\omega)$$

mit

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 F(\omega) = {} & \varepsilon^\beta B(\mathcal{R}(\omega), \mathcal{R}(\omega)) + \varepsilon^2 Q\left(\partial_t \Psi - \sqrt{2}\begin{pmatrix} i\omega_0 & 0 \\ 0 & -i\omega_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_{-1}\end{pmatrix}, \mathcal{R}(\omega)\right) \\ & + \varepsilon^2 Q\left(\Psi, 2B(\Psi, \mathcal{R}(\omega)) + \varepsilon^{\beta-1} B(\mathcal{R}(\omega), \mathcal{R}(\omega)) + \varepsilon^{-\beta-1} RES(\varepsilon\Psi)\right) \\ & + \varepsilon^{-\beta} RES(\varepsilon \Psi). \end{aligned}$$

Da F dieselben Abschätzungen erfüllt wie im Beweis von Theorem 1.2.3, können wir auch für den Fall $N(u) = u^2$ ein zu Theorem 1.2.3 analoges Approximationstheorem beweisen (unter Ausnutzung der Invertierbarkeit der NFT $\mathcal{R} \to \omega$).