MGL. Vorlesung 9 Di, 03.05.2016

<u>Bem.:</u> Die Mindestregularität H^{θ_A} für die NLS-Approximation kann herabgesetzt werden, indem die Approximation so modifiziert wird, dass sie kompakten Träger im Fourierraum hat. Sei dazu $S_\varepsilon u(x) = u(\varepsilon x)$, $\tau_y u(x) = u(x+y)$, $E_\delta u(x) = \mathcal{F}^{-1}(\chi_{[-\delta,\delta]}\mathcal{F}u)(x)$. Dann gilt:

$$\|E_\delta u - S_\varepsilon u\|_{H^m} \le C\|(\chi_{[-\delta,\delta]}-1)\varepsilon^{-1}S_{\varepsilon^{-1}}\hat u\|_{L^2_m}$$

$$\le \sup_{k\in\mathbb{R}}\left|\frac{(\chi_{[-\delta,\delta]}-1)(1+k^2)^{m/2}}{(1+|k/\varepsilon|^2)^{(m+M)/2}}\right|\varepsilon^{-1/2}\|u\|_{H^{m+M}}$$

$$\le C\varepsilon^{m+M-\frac{1}{2}}\|u\|_{H^{m+M}} \qquad (*)$$

für alle $M,m\ge 0$. Ersetzt man die Funktionen $A_j(\varepsilon(x-c_g t),\dots)$, $A_{jn}(\varepsilon(x-c_g t),\dots)$ aus der NLS-Approximation durch $E_\delta S_\varepsilon \tau_{c_g t} A_j(X,\cdot)$, $E_\delta S_\varepsilon \tau_{c_g t} A_{jn}(X,\cdot)$, dann sind diese Funktionen in H^s für alle $s\ge 0$, so dass das Residuum beliebig klein gemacht werden kann. Die Mindestregularität für die A_j, A_{jn} muss dann nur so hoch sein, dass die ε-Potenz in (*) größer ist als 1 und als die ε-Potenz aus der Residuumsabschätzung, die für die Fehlerabschätzung benötigt wird. ⊠

<u>Bem.:</u> Die Nichtresonanzbedingung für die Durchführbarkeit der Normalformtransformation aus dem quadratischen Fall kann noch folgendermaßen abgeschwächt werden.
Sei $p\in\mathbb{R}$, $s\ge 1$, $\hat a\in L^1_{s+1}$, $\hat k\in C(\mathbb{R}^2,\mathbb{C})$ global Lipschitzstetig bezüglich des zweiten Arguments mit Lipschitzkonstante C_k. Dann existiert ein $C(s,a,C_k)$, so dass gilt:

$$\forall f\in H^s:\ \left\|\int_{\mathbb{R}}(\hat k(\cdot,m)-\hat k(\cdot,\cdot-p))\frac{1}{\varepsilon}\hat a\left(\frac{\cdot-m-p}{\varepsilon}\right)\hat f(m)\,dm\right\|_{L^2_s}$$

$$\le C\varepsilon\|\hat f\|_{L^2_s}.$$

Mit Hilfe der Young-Ungleichung für Faltungen gilt:

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} (\hat{k}(\cdot,m) - \hat{k}(\cdot,\cdot-p))\, \varepsilon^{-1} \hat{a}\left(\frac{\cdot-m-p}{\varepsilon}\right) \hat{f}(m)\, dm \right\|_{L^2_s}$$

$$\leq C_k \left\| \int_{\mathbb{R}} \left|(\cdot-m-p)\, \varepsilon^{-1} \hat{a}\left(\frac{\cdot-m-p}{\varepsilon}\right) \hat{f}(m)\right| dm \right\|_{L^2_s}$$

$$\leq C_k \left\| \left(\frac{\cdot-p}{\varepsilon}\right) \hat{a}\left(\frac{\cdot-p}{\varepsilon}\right) \right\|_{L^1_s} \|\hat{f}\|_{L^2_s}$$

$$\leq C_k\, \varepsilon\, \|\hat{a}\|_{L^1_{s+1}} \|\hat{f}\|_{L^2_s}.$$

Da der bezüglich der ε-Potenz führende Anteil $\psi_{\pm 1}$ der NLS-Approximation von der Form

$$\varepsilon^{-1} \hat{A}_{\pm 1}\left(\frac{k \mp k_0}{\varepsilon}\right)$$

ist, gilt

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} (\omega_n(\ell) - \omega_n(\cdot - k_0))\, \hat{\psi}(\cdot-\ell)\, \hat{\omega}_n(\ell)\, d\ell \right\|_{L^2_\theta}$$

$$= \left\| \int_{\mathbb{R}} (\omega_n(\cdot - (\cdot-\ell)) - \omega_n(\cdot - k_0))\, \hat{\psi}(\cdot-\ell)\, \hat{\omega}_n(\ell)\, d\ell \right\|_{L^2_\theta}$$

$$\leq \left\| \sup_{k\in\mathbb{R}} |\omega_n(k-(\cdot-\ell)) - \omega_n(k-k_0)|\, |\hat{\psi}(\cdot-\ell)| \right\|_{L^1_\theta} \|\omega_n\|_{L^2_\theta}$$

$$\leq C\varepsilon \|\omega_n\|_{L^2_\theta}.$$

Daher, wenn wir $\omega_n(\ell)$ durch $\omega_n(k-k_0)$ ersetzen, produzieren wir zusätzliche Fehlerterme der Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$, welche unproblematisch sind. Daher können die Nichtresonanzbedingungen abgeschwächt werden zu

$$\inf_{j,n\in\{1,2\}} \inf_{k\in\mathbb{R}} |\omega_j(k) - \omega_1(k_0) - \omega_n(k-k_0)| \geq C > 0,$$

$$\inf_{j,n\in\{1,2\}} \inf_{k\in\mathbb{R}} \left| \omega_j(k) - \omega_2(-k_0) - \omega_n(k-k_0) \right| \geq C > 0.$$

Als weiteres zentrales Beispiel für die NLS-Approximation betrachten wir die Boussinesq-Gleichung

[Problem: einzelne Punkte (k) verletzen die NRB → einzelne Resonanzen]

$$\partial_t^2 u = \partial_x^2 u + \partial_x^2 (u^2) + \partial_t^2 \partial_x^2 u + \mu \partial_x^6 u,$$

$x, t, u(x,t) \in \mathbb{R}$, $\mu \geq 0$. Betrachte zunächst den Fall $\mu = 0$. Die Dispersionsrelation ist in diesem Fall

$$\omega^2(k) = \frac{k^2}{1+k^2}.$$

Der Ansatz

$$\begin{aligned} \varepsilon \psi_{NLS} &= \varepsilon A_1(\varepsilon(x-c_g t), \varepsilon^2 t) e^{i(k_0 x + \omega(k_0)t)} + c.c. \\ &+ \varepsilon^2 A_2(\varepsilon(x-c_g t), \varepsilon^2 t) e^{2i(k_0 x + \omega(k_0)t)} + c.c. \\ &+ \varepsilon^2 A_0(\varepsilon(x-c_g t), \varepsilon^2 t) \end{aligned}$$

liefert durch analoge Argumentation wie bisher die NLS-Gleichung

$$\partial_T A_1 = -i \frac{(1-c_g^2 - \omega(k_0)^2)}{2\omega(k_0)(1+k_0^2)} \partial_X^2 A_1 - i \frac{\gamma}{2\omega(k_0)(1+k_0^2)} A_1 |A_1|^2$$

mit

$$\gamma = \frac{4k_0^2}{1-c_g^2} + \frac{k_0^4}{-\omega(k_0)^2 + k_0^2 + 4\omega(k_0)^2 k_0^2}.$$

Auch analog zu oben, kann man eine modifizierte Approximation $\varepsilon\Psi$ konstruieren. Für den Fehler $\varepsilon^\beta R = u - \varepsilon\Psi$ ergibt sich die Gleichung

$$\partial_t^2 R = \partial_x^2 R + \partial_x^2 \partial_t^2 R + 2\varepsilon \partial_x^2 (\Psi R) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

bzw. als System 1. Ordnung im Fourierraum:

$$\partial_t \hat{R}_j(k,t) = i\omega_j(k) \hat{R}_j(k,t) + \varepsilon g_j(k) \int_{\mathbb{R}} \hat{\Psi}(k-m,t) \hat{R}_j(m,t)\, dm + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

$j = 1, 2,$

wobei $\omega_j(0) = \varrho_j(0) = 0$ ist, $\omega_j'(0) \neq 0$, $\varrho_j'(0) \neq 0$ und $\varepsilon\hat{\varphi}$ um $\pm k_0$ konzentriert ist.