

---

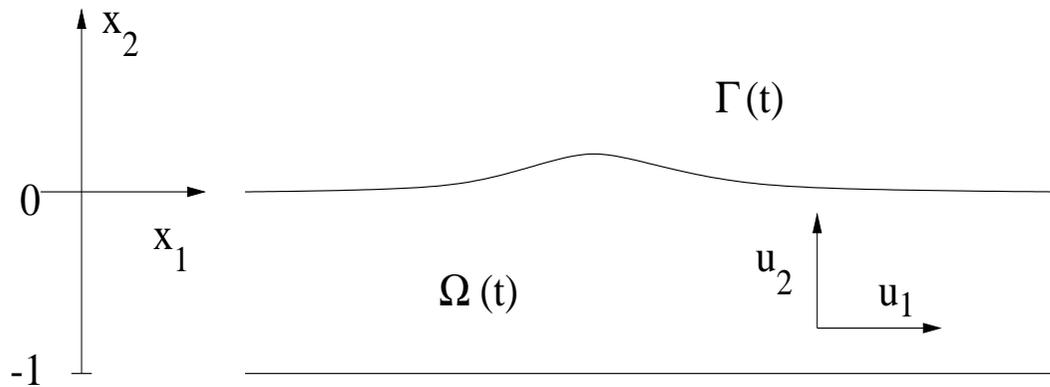
**ZUR MATHEMATISCHEN ERKLÄRUNG DES AUFTRETENS  
TYPISCHER WASSERWELLENPROFILE**

**WOLF-PATRICK DÜLL**

---



# 1. Die 2-dimensionalen Wasserwellengleichungen



- Formulierung in Eulerkoordinaten:
- *Bewegungsgesetz* für das Geschwindigkeitsvektorfeld  $V = (u_1, u_2)$  einer inkompressiblen, nicht viskosen Flüssigkeit unter dem Einfluss der Schwerkraft:

$$V_t + (V \cdot \nabla)V = -\nabla p - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{in } \Omega(t), \quad (1)$$

$$\nabla \cdot V = 0 \quad \text{in } \Omega(t) \quad (2)$$

(inkompressible Eulergleichungen)

---

- *Randbedingungen:*

1. No slip Bedingung an der freien Oberfläche  $\Gamma(t) = \eta(x_1, t)$ , d.h., Oberflächenpartikel bleiben an der Oberfläche:

$$\eta_t = V \cdot \begin{pmatrix} -\eta_{x_1} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{auf } \Gamma(t), \quad (3)$$

2. Laplace-Young Bedingung für den Druck  $p$ :

$$p = -b\kappa \quad \text{at } \Gamma(t), \quad (4)$$

$b$ : Bondzahl (proportional zur Stärke der Oberflächenspannung),

$\kappa$ : Krümmung,

3. Undurchlässiger Boden  $B$ :

$$u_2 = 0 \quad \text{at } B. \quad (5)$$

---

- Von nun an nehmen wir zusätzlich an:

$$\nabla \times V = 0 \quad \text{in } \Omega(t), \quad (6)$$

- Dann existiert ein harmonisches Geschwindigkeitspotential  $\phi$  und ein Operator  $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\eta)$ , so dass

$$V = \nabla \phi \quad \text{und} \quad \phi_y = \mathcal{K} \phi_x, \quad (7)$$

wobei  $x = x_1, y = x_2$  ist.

- Unter Verwendung von (7) kann das System (1)–(6) reduziert werden auf

$$\eta_t = \mathcal{K} u_1 - u_1 \eta_x \quad \text{auf } \Gamma(t), \quad (8)$$

$$(u_1)_t = -\eta_x - \frac{1}{2}((u_1)^2 + (\mathcal{K} u_1)^2)_x + b \left( \frac{\eta_x}{\sqrt{1+\eta_x^2}} \right)_{xx} \quad \text{auf } \Gamma(t). \quad (9)$$

---

- Alternative Koordinatensysteme:

1. Lagrangekoordinaten:

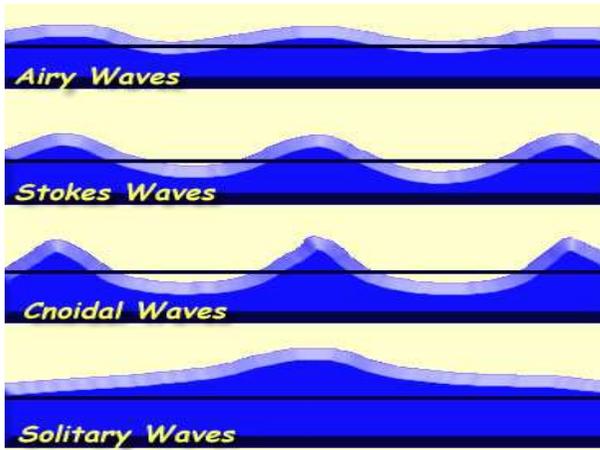
$$\Gamma(t) = \{(\tilde{X}_1(\alpha, t), \tilde{X}_2(\alpha, t)) = (\alpha + X_1(\alpha, t), X_2(\alpha, t)) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}. \quad (10)$$

2. Bogenlängenformulierung:

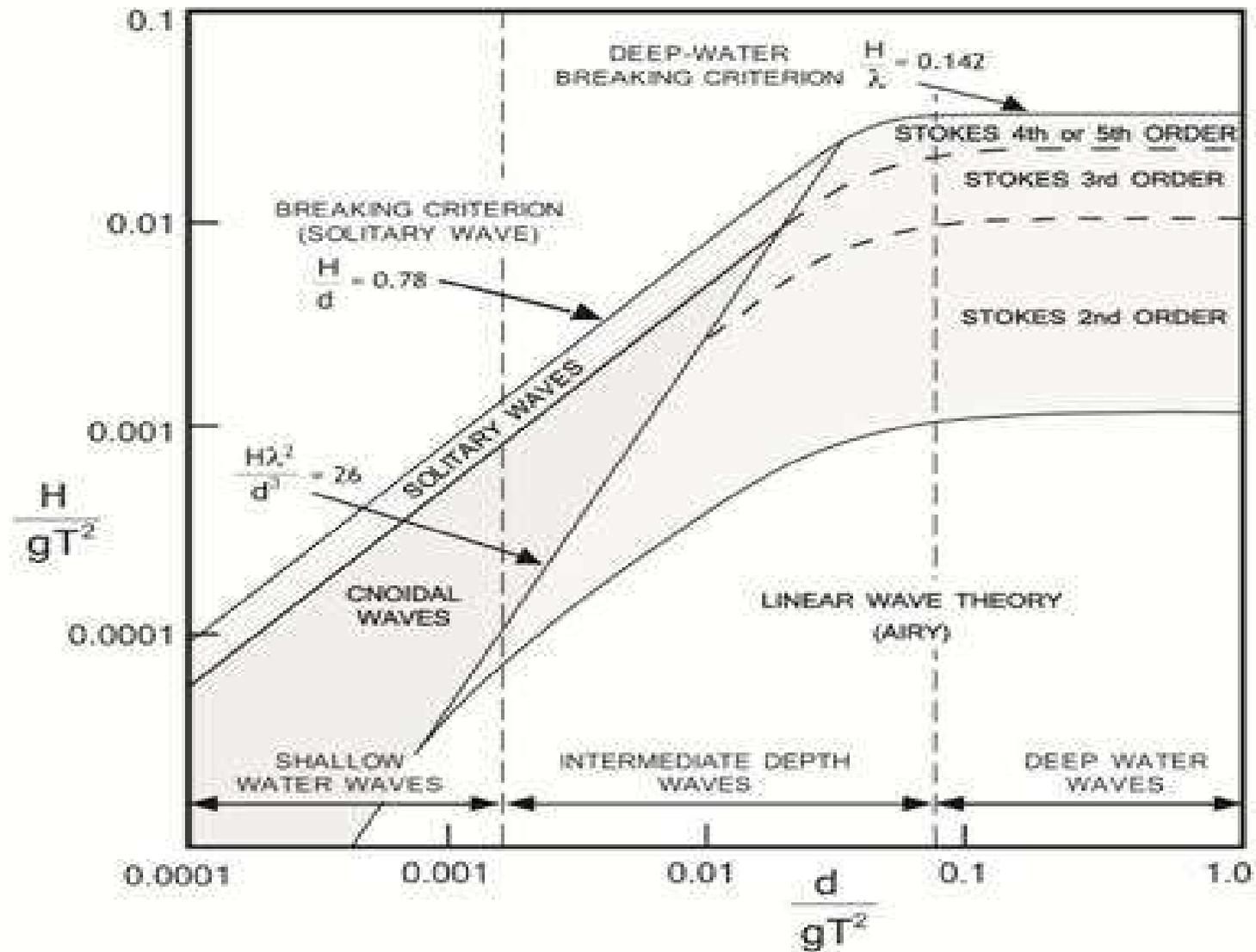
- Parametrisierung der freien Oberfläche  $\Gamma(t)$  nach der Bogenlänge,
  - Zerlegung des Geschwindigkeitsfeldes auf  $\Gamma(t)$  in seine tangentiale und seine normale Komponente,
  - Betrachtung der Evolution der Tangentenwinkel  $\Gamma(t)$  anstelle der Evolution der Tangentensteigungen.
-

- 
- In der Literatur existieren zahlreiche Beweise der lokalen Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen der Wasserwellengleichungen:
    - in Lagrangekoordinaten (z.B. Yosihara, Craig, Wu, Schneider-Wayne),
    - in Eulerkoordinaten (z.B. Iguchi, Lannes),
    - in der Bogenlängenformulierung (Ambrose-Masmoudi).
  - Globale bzw. fast globale Existenzresultate für hinreichend kleine Anfangsdaten sind bislang nur für den Fall einer unendlichen Wassertiefe bekannt:
    - fast globale Existenz der 2-dimensionalen Wasserwellengleichungen (Wu, 2009),
    - globale Existenz der 3-dimensionalen Wasserwellengleichungen (Germain-Masmoudi-Shatah, Wu 2009).
-

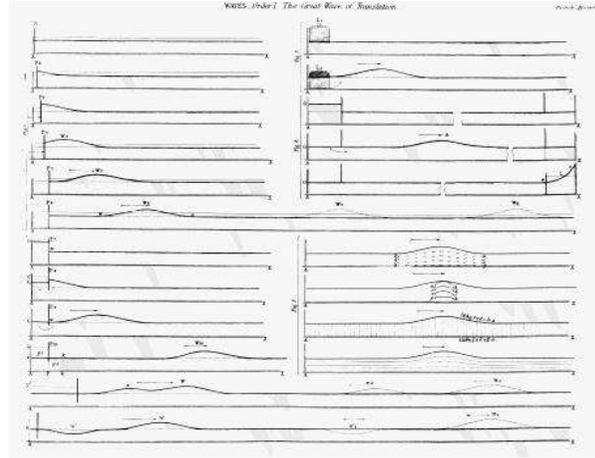
## 2. Typische Wasserwellenprofile



- Verschiedene Wellenprofile in verschiedenen Parameterregimen (Le Méhauté, 1976)



- Solitärwellen wurden 1834 erstmals experimentell von John Scott Russell beobachtet (J. S. Russell: Report on waves. Rep. 14th Meet. Brit. Assoc. Adv. Sci., York, London, John Murray, (1844), 311–390).



- Konsequenz von Solitärwellen: Geschwindigkeitslimits für Hochgeschwindigkeitsfähren:



(a) HSC operating at sub-critical speed in the Marlborough Sounds



(b) HSC operating near super-critical speed in the Marlborough Sound

### 3. Zur mathematischen Erklärung der Wellenprofile

- Sei  $b = 0$ . Setzt man den Langwellenansatz

$$\begin{pmatrix} \eta \\ u_1 \end{pmatrix}(x, t) = \varepsilon^\alpha A(\varepsilon x, \varepsilon t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\varepsilon^{\alpha+1}) \quad (\varepsilon \ll 1)$$

mit  $\alpha > 2$  in (8)–(9) ein und setzt die Terme mit niedrigster  $\varepsilon$ -Potenz gleich, dann erhält man die Wellengleichung

$$A_{\tau\tau} = A_{\xi\xi} \tag{11}$$

with  $\tau = \varepsilon t, \xi = \varepsilon x$ .

- Die Wellengleichung besitzt Lösungen der Form

$$A(\xi, \tau) = a \sin(k(\xi \pm \tau) + \xi_0) \tag{12}$$

mit  $a, \xi_0 \in \mathbb{R}$  und  $k \geq 0$ .

- Sei  $b = 0$ . Dann ist die Linearisierung von (8)–(9) gegeben durch

$$\eta_t = \mathcal{K}_0 u_1 \quad \text{auf } \Gamma(t), \quad (13)$$

$$(u_1)_t = -\eta_x \quad \text{auf } \Gamma(t), \quad (14)$$

wobei der Operator  $\mathcal{K}_0$  durch sein Symbol  $\hat{\mathcal{K}}_0(k) = -i \tanh(k)$  definiert ist.

- Die Linearisierung (13)–(14) besitzt Lösungen der Form

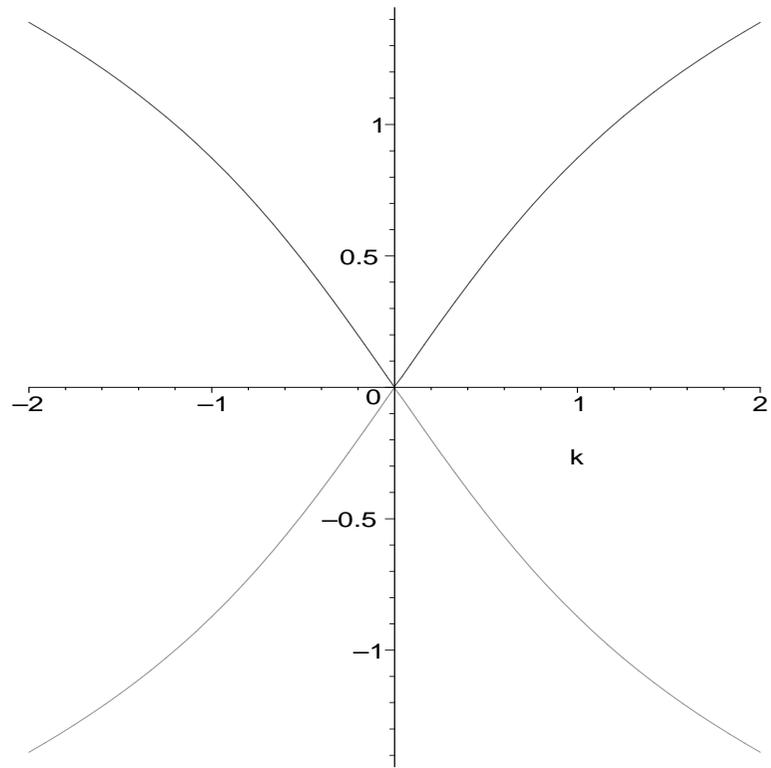
$$\begin{pmatrix} \eta \\ u_1 \end{pmatrix}(x, t) = A(x, t) \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$$

mit

$$A(x, t) = a \sin(k(x - c(k)t) + x_0) \quad (15)$$

sowie  $a, x_0 \in \mathbb{R}$  und  $kc(k) = \omega(k) = \pm \sqrt{k \tanh(k)}$ .

- Es liegt also Dispersion vor.



- Setzt man den Langwellenansatz

$$\begin{pmatrix} \eta \\ u_1 \end{pmatrix}(x, t) = \varepsilon^2 A(\varepsilon(x \pm t), \varepsilon^3 t) \begin{pmatrix} 1 \\ \mp 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \quad (\varepsilon \ll 1)$$

in (8)–(9) ein, dann erhält man zu führender Ordnung in  $\varepsilon$  die Korteweg-de Vries- (KdV-)Gleichung

$$A_\tau = \pm \left( \frac{1}{6} - \frac{b}{2} \right) A_{\xi\xi\xi} \pm \frac{3}{2} AA_\xi \quad (16)$$

mit  $\tau = \varepsilon^3 t$ ,  $\xi = \varepsilon(x \pm t)$ .

- Für  $b = \frac{1}{3} + 2\nu\varepsilon^2$  erhält man mit Hilfe des Ansatzes

$$\begin{pmatrix} \eta \\ u_1 \end{pmatrix}(x, t) = \varepsilon^4 A(\varepsilon(x \pm t), \varepsilon^5 t) \begin{pmatrix} 1 \\ \mp 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\varepsilon^5)$$

die Kawahara-Gleichung

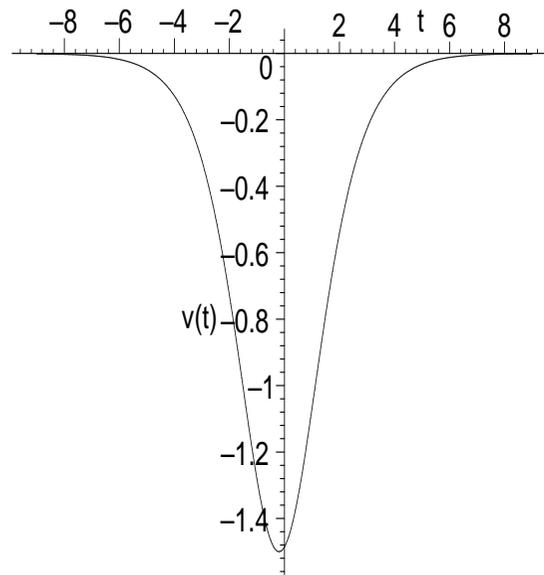
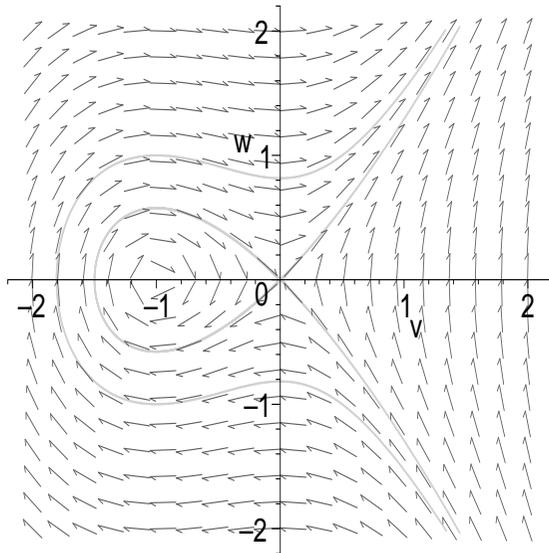
$$\partial_\tau A = \mp \nu \partial_\xi^3 A \pm \frac{1}{90} \partial_\xi^5 A \pm \frac{3}{2} A \partial_\xi A \quad (17)$$

mit  $\tau = \varepsilon^5 t$ ,  $\xi = \varepsilon(x \pm t)$ .

- Die KdV-Gleichung besitzt periodische Lösungen (das sind die knoidalen Wellen). Außerdem besitzt sie Solitärwellenlösungen der Form

$$A(\xi, \tau) = -2c \operatorname{sech}^2(\sqrt{c}(\xi - 4c\tau)) \quad (18)$$

mit  $c > 0$ .



- Darüber hinaus besitzt die KdV-Gleichung N-Soliton-Lösungen.

- 
- Die mathematisch rigorose Rechtfertigung der KdV- und der Kawahara-Approximation erfolgt durch den Beweis, dass der relative Fehler der Approximation auf den charakteristischen Längen- und Zeitskalen der Approximationsgleichungen klein ist.
  - Approximationsbeweise auf den richtigen Skalen in der Literatur:  
Craig (1985), Schneider-Wayne (2000, 2002) : mit Hilfe von Lagrangekoordinaten,  
Bona-Colin-Lannes (2005), Iguchi (2007): mit Hilfe von Eulerkoordinaten,  
D. (2012): mit Hilfe der Bogenlängenformulierung.
  - Die Bogenlängenformulierung ist die einzige Formulierung, in der die Fehlerabschätzungen gleichmäßig bezüglich der Stärke der Oberflächenspannung sind, wenn  $b$  und  $\varepsilon$  gegen 0 gehen. Somit können die Fälle mit und ohne Oberflächenspannung gemeinsam in einem einzigen Beweis behandelt werden.
-

## Approximationstheorem:

Für alle  $b_0, C_0, \tau_0 > 0$  existiert ein  $\varepsilon_0 > 0$ , so dass für alle  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  mit  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$  und alle  $b \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}$  mit  $0 \leq b \leq b_0$  Folgendes gilt. Sei

$$\eta|_{t=0}(x) = \varepsilon^2 \Phi_1(\varepsilon x), \quad u_1|_{t=0}(x) = \varepsilon^2 \Phi_2(\varepsilon x)$$

mit  $\|(\Phi_1, \Phi_2)\|_{H_\xi^{s+8} \cap H_\xi^{s+3}(k)} \leq C_0 \varepsilon^l$ , wobei  $\xi = \varepsilon x$ ,  $s \geq 7$ ,  $k > 1$  und  $l \geq 0$ . Sei

$$(A_1)_\tau = \left(\frac{b}{2} - \frac{1}{6}\right) (A_1)_{\xi\xi\xi} - \frac{3}{2} A_1 (A_1)_\xi, \quad (A_2)_\tau = \left(\frac{1}{6} - \frac{b}{2}\right) (A_2)_{\xi\xi\xi} + \frac{3}{2} A_2 (A_2)_\xi,$$

$$A_1|_{\tau=0} = \frac{1}{2}(\Phi_1 + \Phi_2), \quad A_2|_{\tau=0} = \frac{1}{2}(\Phi_1 - \Phi_2).$$

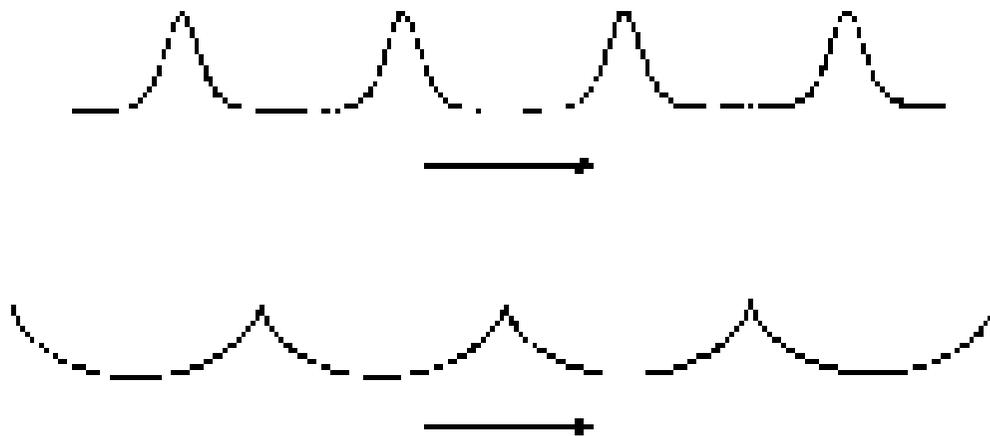
Dann existiert eine eindeutige Lösung der 2-dimensionalen Wasserwellengleichungen (8)–(9) zu den obigen Anfangsbedingungen, für die

$$\sup_{t \in [0, \tau_0/\varepsilon^3]} \left\| \begin{pmatrix} \eta \\ u_1 \end{pmatrix} (\cdot, t) - \psi(\cdot, t) \right\|_{H_\xi^s \times H_\xi^{s-1/2}} \lesssim \varepsilon^{4+l}$$

gilt, wobei

$$\psi(x, t) = \varepsilon^2 A_1(\varepsilon(x-t), \varepsilon^3 t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \varepsilon^2 A_2(\varepsilon(x+t), \varepsilon^3 t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- Die 2-dimensionalen Wasserwellengleichungen (8)–(9) besitzen auch exakte periodische Lösungen (das sind die Stokeswellen) und Solitärwellenlösungen.
- Es gibt zwei Typen von Stokeswellen:



- Die Existenz von Stokeswellen (beide Typen, wobei der Fall extremer Stokeswellen schwieriger ist) wurde mit folgenden Methoden bewiesen (z.B. von Amick, Babenko, Buffoni, Dancer, Fraenkel, Plotnikov, Toland):
- Periodischer Lösungsansatz, Transformation auf ein fixes Gebiet und Wahl geeigneter Koordinaten

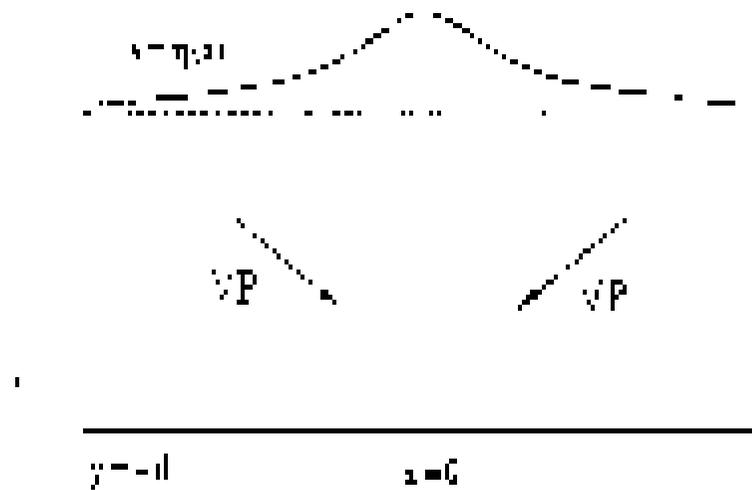
- Stokeswellen resultieren dann aus nichttrivialen Lösungen  $\theta \in C_0[0, \pi]$  der sogenannten Nekrasovschen Integralgleichung

$$F(\theta, \lambda) = \frac{1}{3\pi} T \left( \frac{\sin \theta}{\lambda^{-1} + \int_0^t \sin \theta(u) du} \right) = 0, \quad T f(s) := \int_0^\pi f(t) \ln \left| \frac{\sin \frac{1}{2}(s+t)}{\sin \frac{1}{2}(s-t)} \right| dt$$

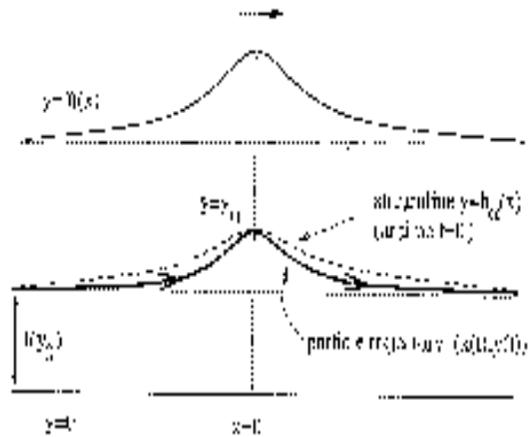
- Man erhält diese Lösungen der Integralgleichung mit Hilfe von Kompaktheitseigenschaften des Operators  $T$  und durch Einsatz von lokaler und globaler Bifurkationstheorie.
- Studium von Pseudodifferentialoperatoren
- Es gibt außerdem Existenzbeweise von Stokeswellen für die 2-dimensionalen Wasserwellengleichungen mit Rotation (z.B. von A.Constantin, Ehrnström, Escher, Groves, Strauss, Wahlén).

- 
- Die Existenz von Solitärwellen wurde mit folgenden alternativen Methoden bewiesen:
  - Reihenansätze (Friedrichs-Hyers)
  - Nash-Moser-Iteration (Beale)
  - Räumliche Dynamik, Zentrumsmannigfaltigkeitenreduktion und Bifurkationstheorie (Kirchgässner, Amick, Buffoni, Groves, Iooss, Mielke, Toland, Vanderbauwhede, Wahlén)
-

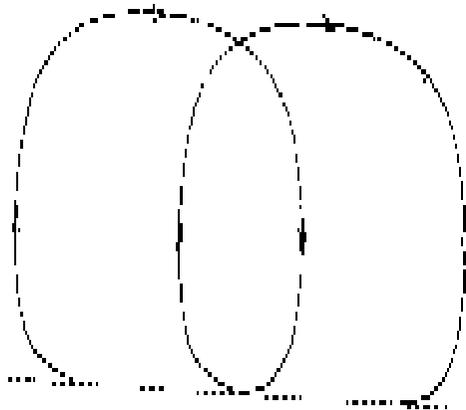
- Es gibt auch Resultate bezüglich der qualitativen Eigenschaften der Strömungen unterhalb von Stokes- und Solitärwellen (A.Constantin, Escher, Hsu, Strauss, 2006-2011):
- Monotonieeigenschaften des Drucks:



- Verlauf der Partikeltrajektorien unter Solitärwellen:



- Verlauf der Partikeltrajektorien unter Stokeswellen:



- Die Beweise erfolgen mit Hilfe von Transformationen auf fixe Gebiete und mit Hilfe elliptischer Maximumprinzipien.

- Setzt man den Ansatz

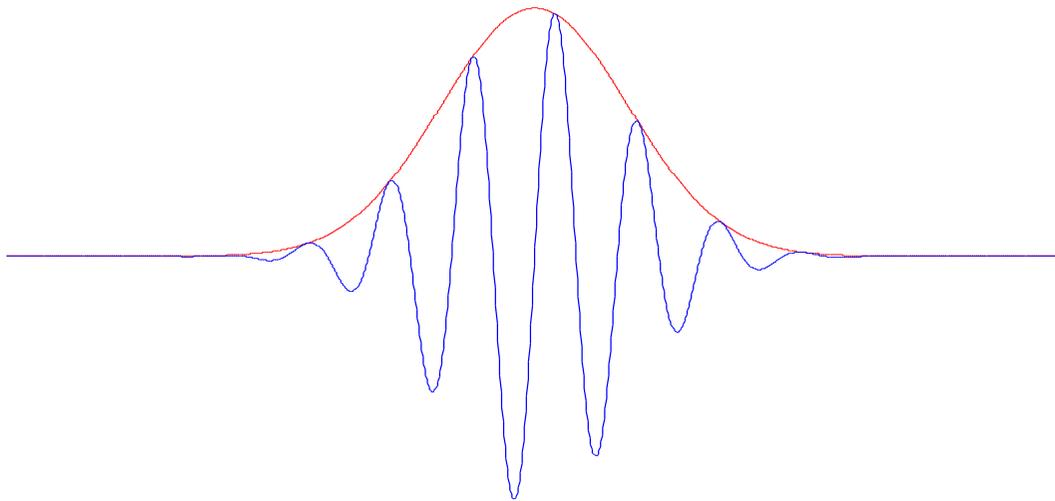
$$\begin{pmatrix} \eta \\ u_1 \end{pmatrix}(x, t) = \varepsilon A(\varepsilon(x - ct), \varepsilon^2 t) e^{ik_0 x - \omega(k_0)t} \varphi(k_0) + c.c. \quad (\varepsilon \ll 1)$$

mit  $\varphi(k_0) \in \mathbb{C}^2$  in (8)–(9) ein, erhält man zu führender Ordnung in  $\varepsilon$  die Nichtlineare Schrödinger-(NLS-)Gleichung

$$A_\tau = i\nu_1 A_{\xi\xi\xi} + i\nu_2 A|A|^2 \quad (19)$$

mit  $\tau = \varepsilon^2 t$ ,  $\xi = \varepsilon(x - ct)$  und  $\nu_j \in \mathbb{R}$  (Zakharov, 1968).

- Die NLS-Gleichung beschreibt dabei die Evolution der Einhüllenden eines oszillierenden Wellenpakets mit Grundwellenzahl  $k_0$ .



- Die Approximation von Lösungen der 2-dimensionalen Wasserwellengleichungen mit Hilfe der NLS-Gleichung ist beispielsweise bei der Modellierung von Monsterwellen (Freak Waves) von Interesse.



- 
- Mathematisch rigorose Rechtfertigungen der NLS-Approximation auf den richtigen Skalen gibt es bislang nur für den Fall ohne Oberflächenspannung:  
Totz-Wu (2012): für unendliche Wassertiefe,  
D.-Schneider-Wayne (2012): für endliche Wassertiefe.
  - Zentrale Beweistechnik sind Normalformtransformationen.
-

