**Blatt 1 Nichtlineare Partielle Differentialgleichungen 28.10.2015**

---

**Aufgabe 1.**

Lösen Sie die Transportgleichung $\partial_t u = \partial_x u$ für $x \in (0,1)$ mit der Anfangsbedingung $u(x,0) = 1$ für alle $x \in [0,1]$ und der Randbedingung $u(1,t) = \cos(t)$ für $t \geqq 0$.

**Aufgabe 2.**

Sei

$$U(t,U_0)(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} U_0(y)\, dy.$$

a) Zeigen Sie die Halbgruppeneigenschaft

$$U(t+s,U_0) = U(t,U(s,U_0)).$$

b) Zeigen Sie: Die Halbgruppeneigenschaft und die Stetigkeit von $t \mapsto U(t)$ in $t = 0$ in $C^0_{b,\text{unif}}$ implizieren die Stetigkeit von $t \mapsto U(t)$ in jedem $t > 0$ in $C^0_{b,\text{unif}}$.

**Aufgabe 3.**

Sei $u$ eine Lösung der Diffusionsgleichung mit $\int_{-\infty}^{\infty} |u(x,0)|\,|x|\; dx < \infty$. Zeigen Sie, dass ein $C > 0$ existiert, so dass

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \sqrt{t} u\left(x\sqrt{t}, t\right) - \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{x^2}{4}} \int u(y,0)\, dy \right| \leqq C t^{-\frac{1}{2}}$$

gilt.

**Aufgabe 4.**

Sei $u$ eine Lösung der Diffusionsgleichung. Zeigen Sie:

**a)** Ist $\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{u}(k,0)|\, dk < \infty$, dann existiert ein $C > 0$, so dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} |k\widehat{u}(k,t)|\, dk \leqq \frac{C}{\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{u}(k,0)|\, dk$$

gilt.

**b)** Ist $\widehat{u} \in C^1_{b,\text{unif}}$, dann existiert ein $C > 0$, so dass

$$\sup_{k\in\mathbb{R}} \left| \widehat{u}\left(\frac{k}{\sqrt{t}}, t\right) - \widehat{u}(0,0) e^{-k^2} \right| \leqq C t^{-\frac{1}{2}}$$

gilt.