PD Dr. W.-P. Düll

Blatt 2 Nichtlineare Partielle Differentialgleichungen 4.11.2015

Aufgabe 5.

Sei u eine Lösung der Airygleichung $\partial_t u = \partial_x^3 u$, wobei $x \in \mathbb{R}$ sei.

a) Zeigen Sie, dass die Lösungskurve $t \mapsto u(\cdot, t)$ stetig in $L^2(\mathbb{R})$ ist.

b) Zeigen Sie, dass

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2} = \|u(\cdot, 0)\|_{L^2}.$$

gilt.

c) Bestimmen Sie die zur Airygleichung gehörende Phasengeschwindigkeit c_p und Gruppengeschwindigkeit c_g.

Aufgabe 6.

Betrachten Sie die lineare Schrödingergleichung

$$\partial_t u = -i\partial_x^2 u$$

mit $x, t \in \mathbb{R}$ und $u(x,t) \in \mathbb{C}$. Setzen Sie den Ansatz

$$u(x,t) = \varepsilon A(\varepsilon(x - c_g t), \varepsilon^2 t)e^{ik(x-c_p t)}$$

mit $0 < \varepsilon \ll 1$, $c_g, c_p, k \in \mathbb{R}$, $A(X,T) \in \mathbb{C}$ in die lineare Schrödingergleichung ein und machen Sie einen Koeffizientenvergleich der ε-Potenzen. Welche Gleichungen ergeben sich dabei für c_p, c_g und A?

Aufgabe 7.

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u &= \partial_x^2 u \\ u(x,0) &= f(x) \in H^m(\mathbb{R}) \\ \partial_t u(x,0) &= 0 \end{aligned}$$

mit Hilfe der Fouriertransformation und zeigen Sie, dass ein $C > 0$ existiert, so dass

$$\|u(\cdot, t)\|_{H^m} \leqq C\|f\|_{H^m}$$

gilt.